

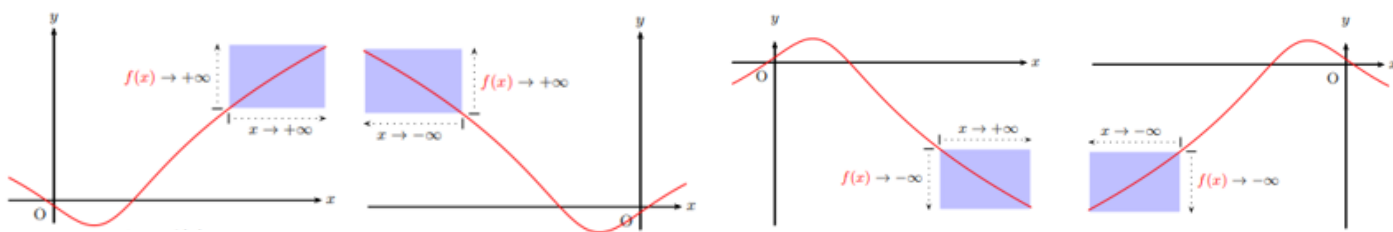
Fiche A2.1 : Limites d'une fonction

1 – Limite en l'infini

Définition 1 :

Notation : On dit dans ce cas que la fonction « **tend vers** $\pm\infty$ en $\pm\infty$ » et on note $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Remarque : Lorsque $x \rightarrow +\infty$ on regarde « vers la droite » ; lorsque $x \rightarrow -\infty$ « vers la gauche » du repère. Lorsque $f(x) \rightarrow +\infty$ la courbe va « vers le haut » ; lorsque $f(x) \rightarrow -\infty$ la courbe va « vers le bas » du repère



Exemple 1 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ dont on a tracé la courbe ci-dessous.

1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x « tend » vers $+\infty$? vers $-\infty$?

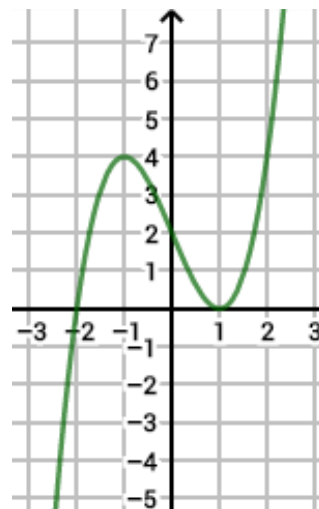
2) A l'aide de la calculatrice, retrouver le tableau de valeurs suivant :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$\cong -10^{12}$	$\cong -10^9$	$\cong -10^6$	-969	971	999701	$\cong 10^9$	$\cong 10^{12}$

3) Déterminer une valeur de x à partir de laquelle les valeurs de $f(x)$ sont plus grandes que le nombre A :

• $A = 10\ 000$:

• $A = 100\ 000$:

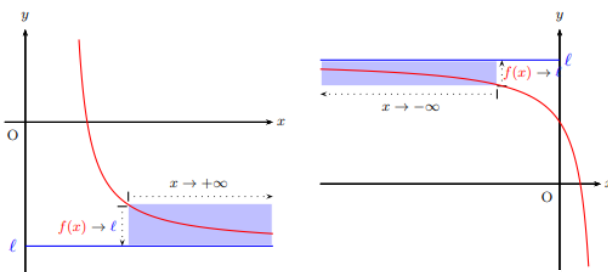


Définition 2 :

Notation : On dit dans ce cas que la fonction « **tend vers** l en $\pm\infty$ » et on note $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

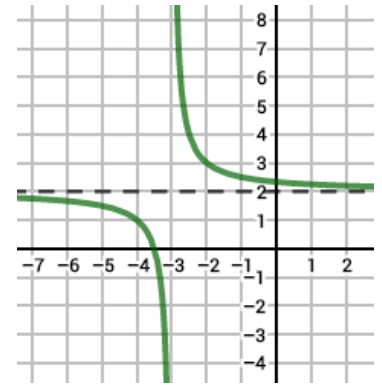
Remarque : Lorsque $f(x) \rightarrow l$ en $\pm\infty$, la courbe de la fonction se rapproche de la droite d'équation $y = l$

On dit que cette droite est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$.



Exemple 2 : Soit la fonction f définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ dont on a tracé la courbe ci-dessous.

1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de $+\infty$ ou $-\infty$?



2) A l'aide de la calculatrice, retrouver le tableau de valeurs suivant :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	1,9999	1,9990	1,989	1,8571	2,0769	2,0097	2,0010	2,0001

3) A partir de quels valeurs de x , les valeurs de $f(x)$ se rapproche de la limite à une distance de ϵ près.

• $\epsilon = 0.01$:

• $\epsilon = 0.001$:

2 – Limite en un point

Définition 3 :

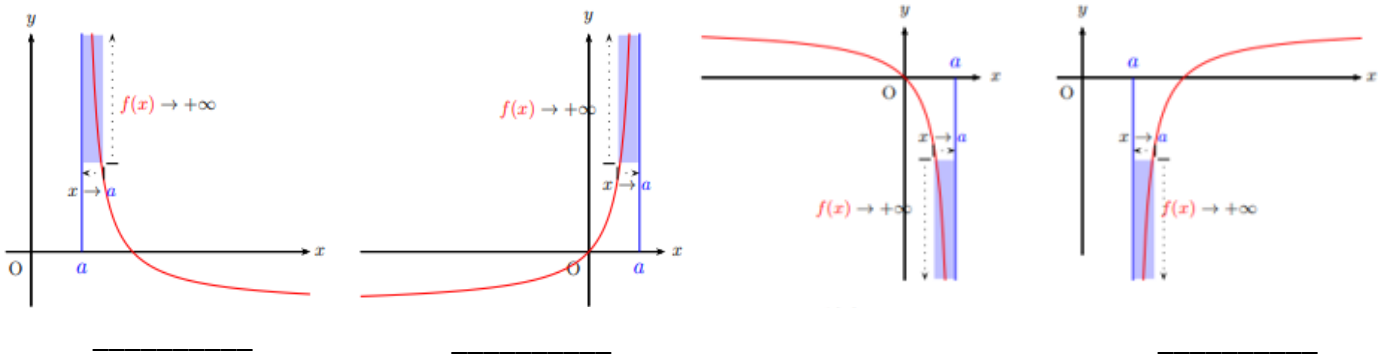
Notation : On dit dans ce cas que la fonction « **tend vers** $\pm\infty$ en a » et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Cependant, la limite d'une fonction en un point n'est pas toujours unique. Dans ce cas on doit préciser :

- Si on approche de a par valeurs inférieures (par la gauche) : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x < a} f(x)$.
- Si on approche de a par valeurs supérieures (par la droite) : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x > a} f(x)$.

Remarque : Lorsque $f(x) \rightarrow \pm\infty$ en a , la courbe de la fonction se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

On dit que cette droite est une **asymptote verticale** à la courbe de f . La valeur a est une « **valeur interdite** ».



Exemple 3 : On reprend la fonction f définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$.

1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de -3 ?

2) A l'aide de la calculatrice, retrouver le tableau de valeurs suivant :

x	$-3,1$	$-3,01$	$-3,001$	$-3,0001$	$-2,9999$	$-2,999$	$-2,99$	$-2,9$
$f(x)$	-8	-98	-998	-9998	10002	1002	102	12

3) A quelle distance ϵ , x doit-il être de -3 pour que les valeurs de $f(x)$ soit :

• > 1000 :

• < -90 :

