Fiche A2.1 : Limites d'une fonction

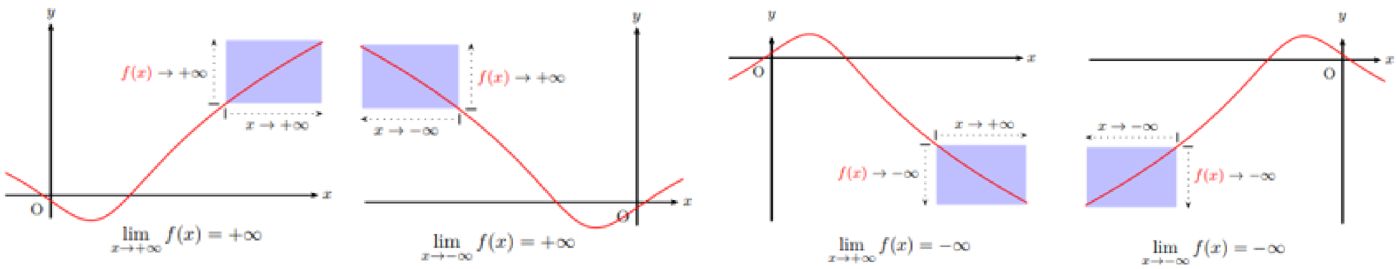
1 – Limite en l'infini

Définition 1 : On dit qu'une fonction f a pour limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$, si $f(x)$ prend des valeurs (positives ou négatives) aussi grande que l'on veut, dès que x prend des valeurs (positives ou négative) assez grandes.

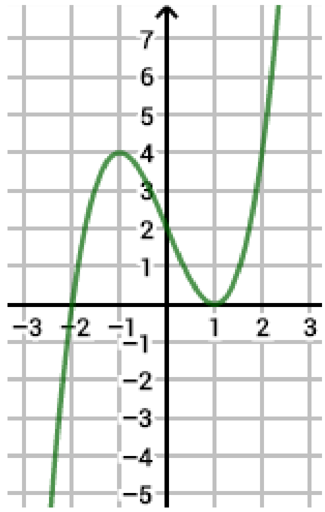
Notation : On dit dans ce cas que la fonction « **tend vers** $\pm\infty$ en $\pm\infty$ » et on note $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Remarque : Lorsque $x \to +\infty$ on regarde « vers la droite » ; lorsque $x \to -\infty$ « vers la gauche » du repère.

Lorsque $f(x) \to +\infty$ la courbe va « vers le haut » ; lorsque $f(x) \to -\infty$ la courbe va « vers le bas » du repère



Exemple 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ dont on a tracé la courbe ci-dessous.



1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x « tend » vers $+\infty$? vers $-\infty$?

   Lorsque $x \to +\infty$, $f(x)$ devient de plus en plus grand : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   Lorsque $x \to -\infty$, $f(x)$ devient de plus en plus petit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2) A l'aide de la calculatrice, retrouver le tableau de valeurs suivant :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$\cong -10^{12}$	$\cong -10^9$	$\cong -10^6$	-969	971	999701	$\cong 10^9$	$\cong 10^{12}$

3) Déterminer une valeur de x à partir de laquelle les valeurs de $f(x)$ sont plus grandes que le nombre A :

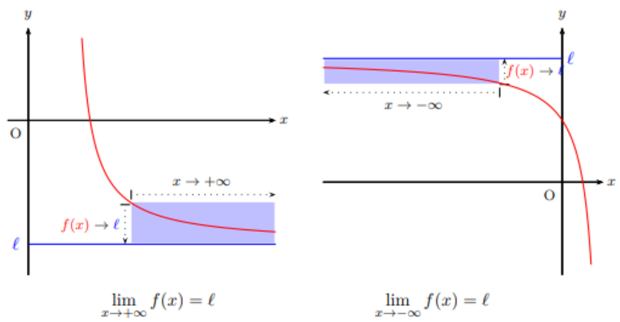
   • $A = 10\ 000$: Pour $x \geq 22$ • $A = 100\ 000$: Pour $x \geq 47$

Définition 2 : Soit l un nombre réel. On dit qu'une fonction f a pour limite l en $\pm\infty$, si $f(x)$ prend des valeurs aussi proche que l'on veut de l, dès que x prend des valeurs (positives ou négative) assez grandes.

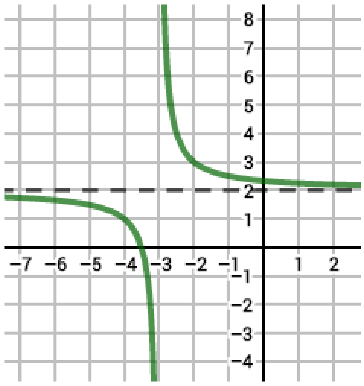
Notation : On dit dans ce cas que la fonction « **tend vers** l en $\pm\infty$ » et on note $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$.

Remarque : Lorsque $f(x) \to l$ en $\pm\infty$, la courbe de la fonction se rapproche de la droite d'équation $y = l$

On dit que cette droite est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$.



Exemple 2 : Soit la fonction f définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$ dont on a tracé la courbe ci-dessous.



1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de $+\infty$ ou $-\infty$?

   Lorsque $x \to \pm\infty$, $f(x)$ devient de plus en plus proche de la valeur 2.

   La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$: On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

2) A l'aide de la calculatrice, retrouver le tableau de valeurs suivant :

x	-10^4	-10^3	-10^2	-10	10	10^2	10^3	10^4
$f(x)$	$1,9999$	$1,9990$	$1,989$	$1,8571$	$2,0769$	$2,0097$	$2,0010$	$2,0001$

3) A partir de quels valeurs de x, les valeurs de $f(x)$ se rapproche de la limite à une distance de ϵ près.

   - $\epsilon = 0.01$: Pour $x \geq 98$
   - $\epsilon = 0.001$: Pour $x \geq 1050$

2 – Limite en un point

Définition 3 : Soit a un nombre réel. On dit qu'une fonction f a pour limite $\pm\infty$ en a, si $f(x)$ prend des valeurs (positives ou négatives) aussi grande que l'on veut, dès que x se rapproche suffisament de a

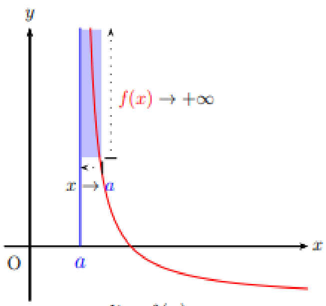
Notation : On dit dans ce cas que la fonction « **tend vers** $\pm\infty$ en a » et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Cependant, la limite d'une fonction en un point n'est pas toujours unique. Dans ce cas on doit préciser :

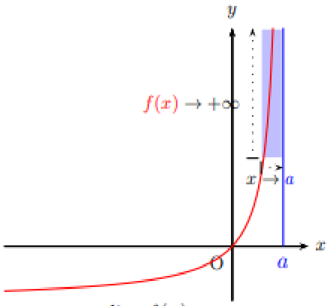
- Si on approche de a par valeurs inférieurs (par la gauche) : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.
- Si on approche de a par valeurs supérieures (par la droite) : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$.

Remarque : Lorsque $f(x) \to \pm\infty$ en a, la courbe de la fonction se rapproche de la droite d'équation $x = a$.

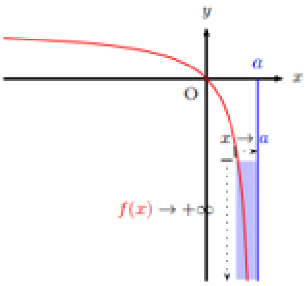
On dit que cette droite est une **asymptote verticale** à la courbe de f. La valeur a est une « **valeur interdite** ».



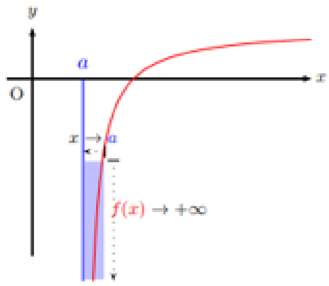
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$

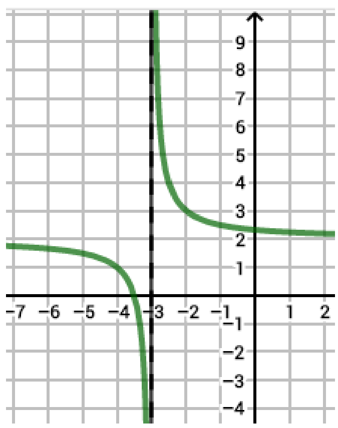


$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$

Exemple 3 : On reprend la fonction f définie pour $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x+7}{x+3}$.



1) Quel est le comportement de $f(x)$ lorsque x se rapproche de -3 ?

   La droite d'équation $x = -3$ est une asymptote verticale à la courbe de f

   On a : $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$

2) A l'aide de la calculatrice, retrouver le tableau de valeurs suivant :

x	$-3,1$	$-3,01$	$-3,001$	$-3,0001$	$-2,9999$	$-2,999$	$-2,99$	$-2,9$
$f(x)$	-8	-98	-998	-9998	10002	1002	102	12

3) A quelle distance ϵ, x doit-il être de -3 pour que les valeurs de $f(x)$ soit :

   - > 1000 : $\epsilon = 0.001$ à droite de -3
   - < -90 : $\epsilon = 0.01$ à gauche de -3