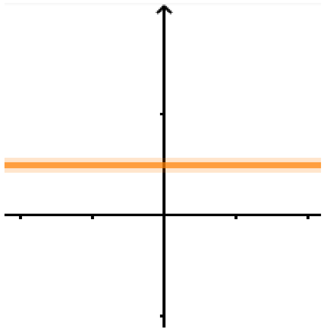
Fiche A2.2 : Calcul de limites

1 – Limites des fonctions de références

Fonction constante

$f(x) = k$ (où k est un réel)

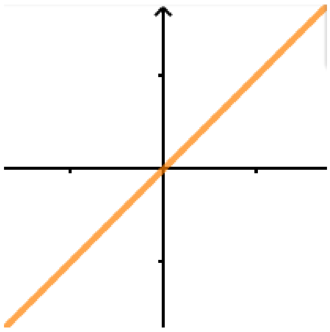


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$

Fonction identité

$f(x) = x$

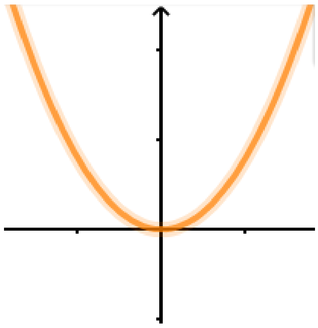


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Fonction carré

$f(x) = x^2$

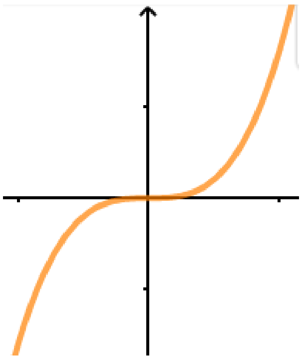


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Fonction cube

$f(x) = x^3$

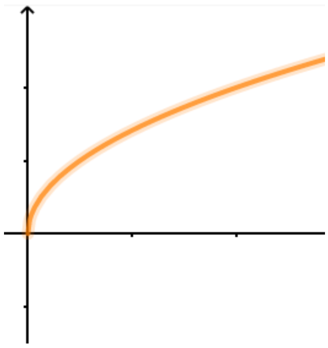


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Fonction racine carré

$f(x) = \sqrt{x}$

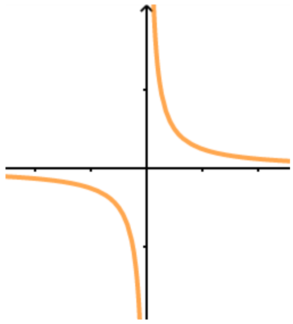


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Fonction inverse

$f(x) = \frac{1}{x}$

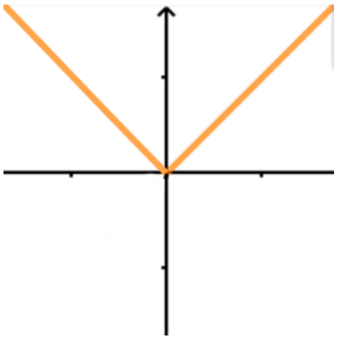


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Fonction valeur absolue

$f(x) = |x|$

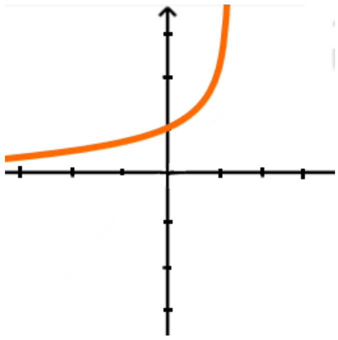


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Fonction exponentielle

$f(x) = e^x$

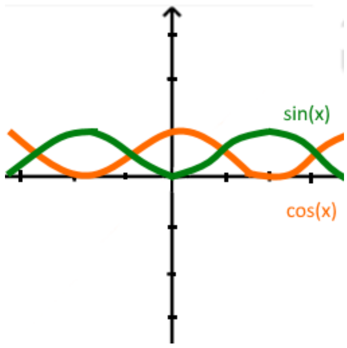


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$

Fonction trigonométrique

$f(x) = \cos(x)\ ou\ \sin(x)$



Pas de limites en $+\infty$

Pas de limites en $-\infty$

Remarque : Plus généralement les fonctions puissances $f(x) = x^n$ ont mêmes limites que :

- La fonction carré si n est **pair.**
- La fonction cube si n est **impair.**

2 – Opérations sur les limites

● Pour calculer la limite d'une fonction complexe on utilise les mêmes règles opératoires que pour les suites : Elles sont rappellées dans les tableaux suivants et s'appliquent pour les limites en $+\infty$, $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

Limite d'une somme

l \ l'	réel	$+\infty$	$-\infty$
réel	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Limite d'un produit

l \ l'	zéro	réel non nul	∞
zéro	0	0	F.I.
réel non nul	0	$l \times l'$	∞ [1]
∞	F.I.	∞ [1]	∞ [1]

Limite d'un quotient

l \ l'	zéro [2]	réel non nul	∞
zéro	F.I.	0	0
réel non nul	∞ [2]	$\frac{l}{l'}$	0
∞	∞ [2]	∞ [2]	F.I.

[1 et 2] Pour déterminer le signe de ∞ on utilise la règle des signes.

F.I. : Forme indéterminée. On doit transformer l'expression, souvent via une factorisation, pour « lever l'indetermination »

Exemple 1 : Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+3\right) = "0^+" + "3" = 3^+$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x) = "-\infty" + "-\infty" = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} (x-2) \times \frac{1}{x} = "(-2)^+" \times "-\infty" = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5(1-x^2) = "-\infty" \times "-\infty" = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{"0^+"}{"-\infty"} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{"0^+"} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3+4x^2+6x-1 = "-\infty" + "+\infty" + "-\infty" - 1"$. C'est une $F.I.$

On factorise par $2x^3$: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3+4x^2+6x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3\left(1+\underbrace{\frac{2}{x}+\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\right) = "-\infty" \times "1" = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{"0"}{"0"}$. C'est une $F.I.$

On factorise l'identité remarquable : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = "1" + "1" = 2$

Propriété 1 (Fonctions composés) : Soient f et u deux fonctions et a un nombre réel ou $\pm\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = l$ et $\lim\limits_{X\to l} f(X) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(u(x)) = L$

Exemple 2 : Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}$: Lorsque $x \to +\infty$ on a $1-x \to -\infty$ et lorsque $X \to -\infty$ on a $e^X \to 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-3x)^4$: Si $x \to +\infty$, $2-3x \to -\infty$ et si $X \to -\infty$, $X^4 \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-3x)^4 = +\infty$.

3 – Théorèmes de comparaison

● Les théorèmes de comparaison énoncés pour les suites fonctionnent aussi pour les fonctions et s'appliquent pour les limites en $+\infty$, $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 : Déterminer la limite de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ en $+\infty$

Pour tout réel x, on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, d'où en divisant par $x > 0$, $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$