

Fiche ___ : Fonctions continues

1 – La notion de continuité

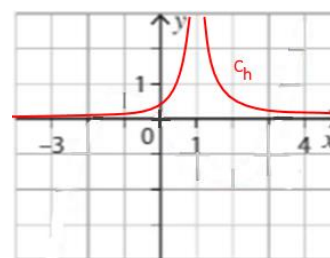
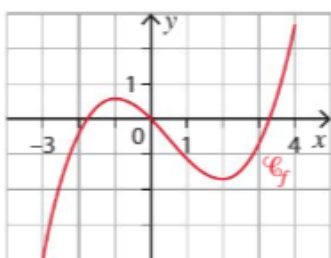
Intuitivement, une fonction continue est une fonction dont on peut tracer la courbe « sans lever le crayon ».

Pour formaliser mathématiquement cette idée de continuité nous allons utiliser la notion de limite :

Définition 1 :

Remarque : Dire qu'une fonction est continue en a signifie d'une part que la limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, c'est-à-dire que les limites à gauche et à droite coïncide $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, et d'autre part qu'elles sont toutes deux égales à l'image de a par f .

Exemple 1 : Les fonctions suivantes sont-elles continues en 1 ?



Définition 2 :

Exemple 2 : La fonction f est continue sur l'intervalle $I = [-3; 4]$ ce qui n'est pas le cas de g et h .

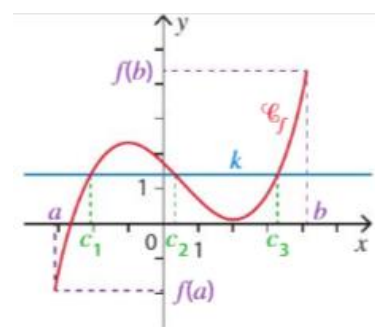
Remarque : Les fonctions « usuelles » sont continues sur leur ensemble de définition.

2 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 1 :

Remarques :

- Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) nous dit en quelque sorte que pour une fonction **continue**, lorsque x varie entre a et b , $f(x)$ passe nécessairement par toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
- L'équation $f(x) = k$ admet alors une ou plusieurs solutions dans $[a; b]$.
- Le théorème précédent fonctionne avec $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ou $f(b)$ par $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



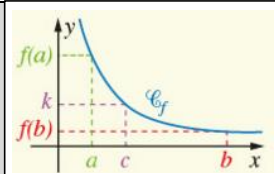
$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = k$$



Exemple 3 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-1; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Vocabulaire : Une fonction est dite (strictement) **monotone** sur un intervalle si elle n'a qu'un seul sens de variation sur cet intervalle : soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante

Propriété 2 :



Remarque : La stricte monotonie de la fonction f entraîne l'**unicité** de la solution de l'équation $f(x) = k$.

Exemple 4 : On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{0.1x}$ sur l'intervalle $[0; 10]$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 10]$.

2) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 0.01 près de la valeur α .

On encadre progressivement α en changeant le pas et la valeur du début du tableau.

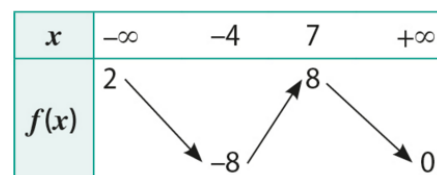
X	Y1			
0	1			
1	1.1052			
2	1.2214			
3	1.3499			
4	1.4918			
5	1.6487			
6	1.8221			
7	2.0138			
8	2.2255			
9	2.4596			
10	2.7183			

X	Y1			
6	1.8221			
6.1	1.8404			
6.2	1.8589			
6.3	1.8776			
6.4	1.8965			
6.5	1.9155			
6.6	1.9348			
6.7	1.9542			
6.8	1.9739			
6.9	1.9937			
7	2.0138			

X	Y1			
6.9	1.9937			
6.91	1.9957			
6.92	1.9977			
6.93	1.9997			
6.94	2.0017			
6.95	2.0037			
6.96	2.0057			
6.97	2.0077			
6.98	2.0097			
6.99	2.0117			
7	2.0138			

Exemple 5 : On considère une fonction f définie et continue sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est le suivant.

- 1) Compléter les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
- 2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3) Combien de fois la courbe de f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?