Fiche A2.3 : Fonctions continues

1 – La notion de continuité

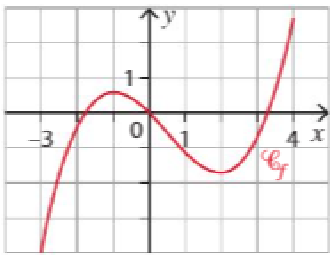
Intuitivement, une fonction continue est une fonction dont on peut tracer la courbe « sans lever le crayon ».

Pour formaliser mathématiquement cette idée de continuité nous allons utiliser la notion de limite :

Définition 1 : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. On dit que f est **continue** en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque : Dire qu'une fonction est continue en a signifie d'une part que la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, c'est-à-dire que les limites à gauche et à droite coïncide $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, et d'autre part qu'elles sont toutes deux égales à l'image de a par f.

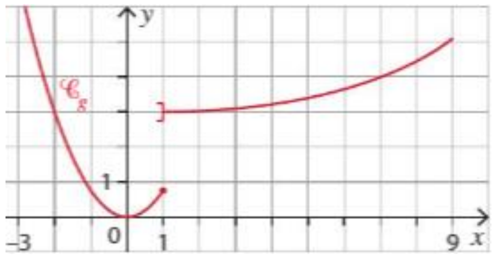
Exemple 1 : Les fonctions suivantes sont-elles continues en 1 ?



La fonction est continue en 1 :

On a, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

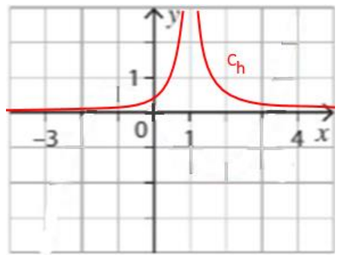
Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$



La fonction n'est pas continue en 1 :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0.8$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ n'est pas définie



La fonction n'est pas continue en 1 :

On a, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Mais, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ qui n'existe pas.

Définition 2 : On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle I, si elle est continue en tout réel a de I.

Exemple 2 : La fonction f est continue sur l'intervalle $I = [-3; 4]$ ce qui n'est pas le cas de g et h.

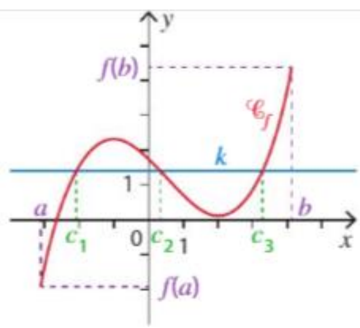
Remarque : Les fonctions « usuelles » sont continues sur leur ensemble de définition.

2 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 1 : Soient f une fonction **continue** sur un intervalle I et a et b deux réels de I tel que $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques :

- Le théorème des valeurs intermédiaires ($T.V.I.$) nous dit en quelque sorte que pour une fonction **continue**, lorsque x varie entre a et b, $f(x)$ passe nécessairement par toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
- L'équation $f(x) = k$ admet alors une ou plusieurs solutions dans $[a; b]$.
- Le théorème précédent fonctionne avec $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = k$

Exemple 3 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-1; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle I.

On calcule $f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 2 = -1 - 3 + 2 = -2 < 0$

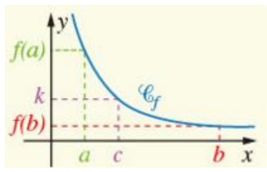
Puis, $f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + 2 = 27 - 27 + 2 = +2 > 0$

Or, f est continue sur $[-1; 3]$ car les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [-1; 3]$ tel que $f(c) = 0$.

Vocabulaire : Une fonction est dite (strictement) **monotone** sur un intervalle si elle n'a qu'un seul sens de variation sur cet intervalle : soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante

Propriété 2 : Soient f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et a et b deux réels de I tel que $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.



Remarque : La stricte monotonie de la fonction f entraîne **l'unicité** de la solution de l'équation $f(x) = k$.

Exemple 4 : On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{0.1x}$ sur l'intervalle $[0; 10]$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 10]$.

   f est continue sur $[0; 10]$ comme composée de deux fonctions continues : $x \mapsto 0.1x$ et $x \mapsto e^x$.

   f est strictement croissante sur $[0; 10]$ car elle est de la forme $x \mapsto e^{kx}$ avec $k > 0$.

   De plus, $f(0) = e^{0.1\times 0} = e^0 = 1 < 2$ et $f(10) = e^{0.1\times 10} = e^1 = e \approx 2.71 > 2$.

   D'après le $T.V.I.$, il existe un unique réel $\alpha \in [0; 10]$, tel que $f(\alpha) = 2$

2) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 0.01 près de la valeur α.

   On encadre progressivement α en changeant le pas et la valeur du début du tableau.

X	Y1
0	1
1	1.1052
2	1.2214
3	1.3499
4	1.4918
5	1.6487
6	1.8221
7	2.0138
8	2.2255
9	2.4596
10	2.7183

$Pas = 1$; $Début = 0$

$\alpha \in [6; 7]$

X	Y1
6	1.8221
6.1	1.8404
6.2	1.8589
6.3	1.8776
6.4	1.8965
6.5	1.9155
6.6	1.9348
6.7	1.9542
6.8	1.9739
6.9	1.9937
7	2.0138

$Pas = 0.1$; $Début = 6$

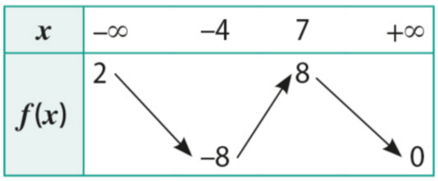
$\alpha \in [6.9; 7]$

X	Y1
6.9	1.9937
6.91	1.9957
6.92	1.9977
6.93	1.9997
6.94	2.0017
6.95	2.0037
6.96	2.0057
6.97	2.0077
6.98	2.0097
6.99	2.0117
7	2.0138

$Pas = 0.01$; $Début = 6.9$

$\alpha \in [6.93; 6.94]$

Exemple 5 : On considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant.



1) Compléter les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

2) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

   En appliquant le $T.V.I.$ sur les 3 intervalles $]-\infty; -4]$, $[-4; 7]$ et $[7; +\infty[$ où la fonction f est continue et strictement monotone, on obtient une unique solution dans chacun de ses intervalles.

3) Combien de fois la courbe de f coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

   Seulement deux fois, car pour $x \in [7; +\infty[$ on a $f(x) > 0$.

   $f(x) = 0$ admet une solution dans $]-\infty; -4]$ et dans $[-4; 7]$.