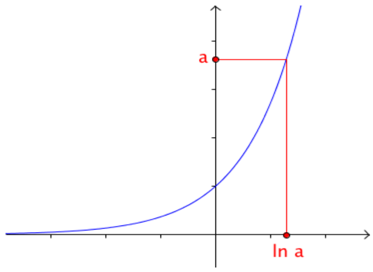
Fiche A4.1 : Logarithme népérien

1 – Définition du logarithme népérien

● La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$.

● D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel positif $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$.

● Cette solution est appelée le logarithme népérien de a et est noté $\ln(a)$.



Définition 1 :

● On appelle **logarithme népérien** du nombre $a > 0$ et on note $\ln a$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$.

● La **fonction logarithme népérien**, noté ln, est la fonction $\ln :]0; +\infty[\to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto \ln x$.

Exemple 1 : Le logarithme népérien $\ln 2$ est l'unique solution de l'équation $e^x = 2$. A l'aide de la calculatrice on peut donner une valeur approchée à 0,01 près de ce nombre : $\ln 2 \approx 0.69$.

Remarque : En physique-chimie on utilise souvent le **logarithme décimal** log à ne pas confondre avec ln :

$\log(a)$ désigne l'unique solution de l'équation $10^x = a$. On a la formule : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

2 – Fonction réciproque de la fonction exponentielle

● La **fonction réciproque** d'une fonction $f : I \longrightarrow J \,;\, x \longmapsto y$ est la fonction $f^{-1} : J \longrightarrow I \,;\, y \longmapsto x$.

Cette fonction existe à condition que tout nombre y de J possède un unique ancédent x par f.

● Voici quelques exemples de fonctions réciproques l'une de l'autre :

. La fonction *carré* de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ et la fonction *racine carré* de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$.

. La fonction *cosinus* de $[0; \pi]$ vers $[-1; 1]$ et la fonction *arccos* de $[-1; 1]$ vers $[0; \pi]$.

Propriété 1 : Les fonctions exp et ln sont **réciproques** l'une de l'autre :

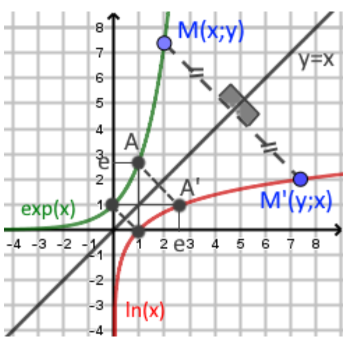
● Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$

● Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$ ● Pour $x > 0$, on a $e^{\ln(x)} = x$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0; +\infty[\\ x & \overset{exp}{\longmapsto} & e^x \\ \| & & \| \\ \ln(y) & \overset{ln}{\longleftarrow\!\shortmid} & y \end{array}$$

Conséquences : $\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$; $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

Propriété 2 : Les courbes des fonctions exp et ln sont **symétriques** par rapport à l'axe $y = x$



● $M(x; y)$ appartient à la courbe de la fonction exponentielle si et seulement si $M'(y; x)$ appartient à la courbe de la fonction logarithme népérien.

● $A(1; e) \in C_{exp}$ donc $A'(e; 1) \in C_{ln}$