Fiche A4.2 : Etude de la fonction logarithme népérien

1 – Etude de la fonction $f(x) = ln(x)$

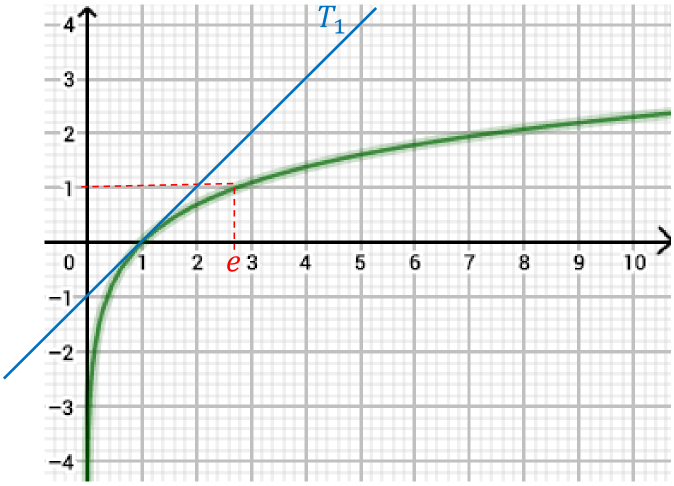
Propriété 1 : La fonction $f(x) = ln(x)$ est **continue** et **dérivable** sur son ensemble de définition $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Tableau de valeurs : A l'aide de la calculatrice on peut compléter le tableau suivant (arrondir à 10^{-2} près).

x	0.1	0.5	1	2	e	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(x)$	-2.3	-0.69	0	0.69	1	1.1	1.39	1.61	1.79	1.95	2.08	2.2	2.3

Courbe représentative :



Limites :

- $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$:
- $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ (très lentement : $ln\ 10^{10} \approx 23$)

Asymptotes :

- Verticale : $x = 0$ (axe des ordonnées)
- Horizontale : Aucune

Tangente : Equation de T_1

$T_1 : y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$ $\quad\Big|$ $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$T_1 : y = x - 1$ $\quad\Big|$ $\ln\ (1) = 0$

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln\ (x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$\ln\ (x)$	‖	$-$	0	$+$	

Extremums :

Pas de Maximum, pas de minimum

2 – Fonctions de la forme $f(x) = \ln u(x)$

On considère une fonction $x \longmapsto u(x)$, définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Propriété 2 : La fonction $f(x) = \ln u(x)$ est dérivable sur I et on a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple 1 : On considère la fonction $f(x) = \ln(x^2+1)$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée f' de f.

$f = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et donc $u'(x) = 2x$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1}$.

Propriété 3 : Soit a un réel ou $\pm\infty$ tel que $a \in I$.

- Si $\lim_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x \to a} \ln u(x) = -\infty$
- Si $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} \ln u(x) = +\infty$

Exemple 2 : • $\lim_{x \to 2^+} \ln(x^2-4) = -\infty$ car $\lim_{x \to 2^+} x^2 - 4 = 0^+$ • $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 4 = +\infty$