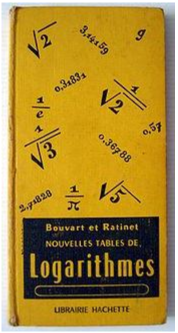
Fiche A4.3 : Propriétés algébriques du logarithme

1 – Relation fonctionnelle et conséquences

Propriété 1 (Relation fonctionnelle) : Pour tous nombres strictement positifs a et b, on a :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Remarque : Historiquement, c'est par le biais de cette formule qu'à été introduite la notion de logarithme. La relation fonctionnelle permet de transformer un produit en somme ce qui était bien pratique à une époque où les calculatrices n'existaient pas encore. Elle a pemis notamment de faciliter le calcul des « grandes multiplications » qui apparaissaient dans les calculs astronomiques par le biais de l'utilisation des tables logarithmiques.



x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

Ex : $36 \times 62 =$

Exemple 1 : A l'aide du tableau de valeur et sans utiliser la calculatrice, calculer les valeurs suivantes :

- $\ln(15) =$
- $\ln(0.8) =$

Les propriétés suivantes sont des corollaires (ou conséquences) de la relation fonctionnelle :

Propriété 2 : Pour tous nombres strictement positifs a et b, et pour tout entier naturel n, on a :

(1) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ (2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

(3) $\ln(a^n) = n\ln(a)$ (4) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Démonstration : Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier naturel.

(1) Pour tout $a > 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1)$ d'où $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) = 0$. On obtient donc $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.

(2) Pour tous $a, b > 0$, on a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ (d'après (1))

(3) $\ln(a^n) = \ln\left(\overbrace{a \times \ldots \times a}^{n\ facteurs}\right) = \underbrace{\ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n\ termes} = n \times \ln(a)$

(4) On $\ln(\sqrt{a}^2) = \ln(a)$ d'où $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemple 2 : A l'aide du tableau de valeurs et sans utiliser la calculatrice, calculer les valeurs suivantes :

- $\ln(0.25) =$
- $\ln(1024) =$
- $\ln\left(\frac{2}{3}\right) =$
- $\ln(\sqrt{5}) =$
- $\ln e^2 - \ln\frac{2}{e} =$

Exemple 3 : Simplifier les expressions suivantes en les écrivant sous la forme $\ln A$ avec A un nombre réel.

- $A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) =$
- $B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3 =$

2 – Equations/Inéquations avec le logarithme

Propriété 3 : Pour tous nombres strictement positifs x et y, on a :

(1) $\ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ (2) $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

(3) $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$ (4) $\ln(x) \leq \ln(y) \Leftrightarrow x \leq y$

Remarque : Ces propriétés proviennent du fait que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont strictement croissante sur leur ensemble de définition, ce qui signifie que l'on peut les appliquer sur une inégalité sans que celle-ci change de signe.

Exemple 4 : Résoudre les équations/inéquations suivantes :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ sur $I =]0; +\infty[$:
- $\ln(2x+5) \geq 0$ sur $I =]-2.5; +\infty[$:

- $\ln(x) = 2$ sur $I =]0; +\infty[$:
- $\ln x = \ln(3x+1)$ sur $I =]0\,;\ +\infty[$

- $e^{x+1} = 5$ sur $I = \mathbb{R}$:
- $\ln(6x+1) \geq 3$ sur $]-\frac{1}{6}; +\infty[$:

Remarque : Le logarithme permet de résoudre des inéquations de la forme : $q^n \geq a$; $q^n \leq a$ où l'inconnue n est une puissance entière (avec $q > 0$ et $a > 0$) : On utilise la formule $\ln(a^n) = n\ln(a)$,

Exemple 5 : Résoudre les équations/inéquations suivantes :

- $2^n \geq 1\,000\,000$:

- $0.8^n < 0.25$:

Exemple 6 : Le salaire de Jean augmente tous les ans de 5%. Il commence avec un salaire de 1650€. Dans combien d'années Jean gagnera plus de 2000€.