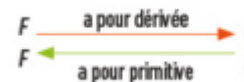


Fiche A5.1 : Primitives

1 – La notion de Primitive

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f sur I , si F est dérivable sur I et que la dérivée de F est égale à f : $F' = f$

Remarque : La recherche de primitive est donc « l'opération inverse » de la dérivation.



Exemple 1 :

- Si $f(x) = 3x^2$ alors la fonction _____ est une primitive de f .
- La fonction $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$:

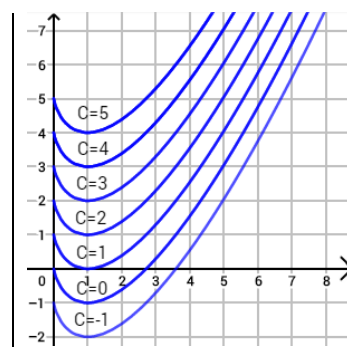
Propriété 1 : Si f admet une primitive F sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions de la forme $x \rightarrow F(x) + C$ où C est une constante réelle.

Remarque : Toutes les fonctions de la forme $x \rightarrow F(x) + C$ admettent la fonction f comme dérivée car la dérivée d'une constante est nulle. Réciproquement si une fonction est une primitive de la fonction f alors elle s'écrit forcément sous la forme $F(x) + C$.

Exemple 2 :

- La fonction $F(x) = x^3 + 1$ est aussi une primitive de la fonction $f(x) = 3x^2$
- L'ensemble des primitives de la fonction logarithme népérien est constitué des fonctions sous la forme (voir figure ci-contre) :

$$F(x) = x \ln x - x + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$



Propriété 2 : Soit f une fonction admettant des primitives F sur I alors pour tous nombres réels x_0 et y_0 , il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition $F(x_0) = y_0$.

Exemple 3 :

- La fonction $F(x) = x^3$ est l'unique primitive de $f(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0 (tel que $F(0) = 0$)
- Cherchons la primitive de la fonction logarithme népérien qui s'annule en 1 (tel que $F(1) = 0$)

Propriété 3 : Soit f une fonction continue sur I alors f admet des primitives sur I .

Remarque : Les fonctions usuelles admettent donc des primitives dont nous donnerons les formules dans le paragraphe suivant. La plupart s'obtiennent par « lecture inverse » du tableau des dérivées usuelles.



2 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitives F de f	Intervalle I
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$] - \infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = x^n$ où n entier, $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	Si $n > -1$: \mathbb{R} Si $n < -1$: $] - \infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	\mathbb{R}
$f(x) = \ln x$	$F(x) = x \ln x - x + C$	$]0; +\infty[$

3 – Primitives et opérations

Propriété 3 : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , et k une constante réelle.

- Si F est une primitive de f sur I , alors kF est une primitive de kf sur I .
- Si F est une primitive de f et G une primitive de g sur I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Fonction f	Primitives F de f sur I	Conditions particulières
$f = u'u^n$ où n entier, $n \neq -1$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I lorsque $n < -1$
$f = \frac{u'}{u}$	$F(x) = \ln(u) + C$	$u(x) > 0$ sur I
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + C$	Aucune
$f(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F(x) = \sqrt{u}$	$u(x) > 0$ sur I

Exemple 4 : Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 + e^x$:
- $f(x) = 2x^2 - 4x$:
- $f(x) = 3 \times (3x + 5)^2$:
- $f(x) = \frac{4x+3}{2x^2+3x+5}$:
- $f(x) = 2xe^{x^2-1}$:
- $f(x) = \frac{5}{2x+6}$:
- $f(x) = e^{-2x}$:

