

Fiche A5.2 : Equations différentielles

1 – La notion d'équation différentielle

Définition 1 : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue, notée généralement y , est une fonction, et dans laquelle apparaît sa dérivée y' , éventuellement ses dérivées successives y'' , y''' , etc, et potentiellement d'autres fonctions.

Vocabulaire :

- Une fonction qui vérifie une équation différentielle est une **solution** de l'équation différentielle.
- **Résoudre** une équation différentielle sur un intervalle I c'est trouver toutes les fonctions définies sur I qui sont solutions de l'équation différentielle.
- **L'ordre** d'une équation différentielle correspond à l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation.

Exemple 1 :

- L'équation $y' = f$ est une équation différentielle dont l'ensemble des solutions est donnée par les primitives de la fonction f .
- L'équation $y' = y$ est une équation différentielle du premier ordre. La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est une solution de cette équation. La fonction $g(x) = e^{x+1}$ est aussi une solution de cette équation.
- L'équation $y'' = -y$ est une équation différentielle du second ordre (car il y a la dérivée seconde). Les fonctions trigonométriques $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ sont des solutions de cette équation.

Remarque : La solution d'une équation différentielle n'est pas unique : Les équations précédentes en possèdent une infinité. Lorsque l'on résout une équation différentielle, on cherche en général des fonctions définies le plus grand intervalle possible.

Exemple 2 : On considère l'équation différentielle (E): $y' + 3y = 6$.

Vérifier que la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5e^{-3x} + 2$ est une solution de l'équation (E).

Exemple 3 : On considère l'équation différentielle (E'): $y' - 4y = 3x + 1$.

Rechercher une solution à cette équation sous la forme d'une fonction affine



2 – Equation $y' = ay$

Propriété 1 : On considère l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ où C une constante réelle.
- Il existe une unique solution à cette équation vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$ (où $x_0, k \in \mathbb{R}$).

Remarques :

- Soit $f(x) = Ce^{ax}$. On a bien $f'(x) = Ca e^{ax} = af(x)$.
- L'unique fonction f vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$ est définie par $f(x) = ke^{a(x-x_0)}$.

Exemple 4 : Résoudre l'équation différentielle $y' = -4y$.

Exemple 5 : Résoudre l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 1$

3 – Equation $y' = ay + b$

Propriété 1 : On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des nombres réels.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C une constante réelle.
- Il existe une unique solution à cette équation vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$ (où $x_0, k \in \mathbb{R}$).

Remarques : Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ s'obtient en additionnant, les solutions $x \mapsto Ce^{ax}$ de l'équation dite **homogène** $y' = ay$ avec une solution **particulière**, la fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$.

Exemple 6 : On considère l'équation différentielle $3y' - 2y = 3$.

1) Trouver une fonction constante solution de cette équation différentielle

2) Déterminer les solutions générales de cette équation différentielle.

3) Déterminer l'unique solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 2$

