Fiche A5.2 : Equations différentielles

1 – La notion d'équation différentielle

Définition 1 : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue, notée généralement y, est une fonction, et dans laquelle apparait sa dérivée y', éventuellement ses dérivées successives y'', y''', etc, et potentiellement d'autres fonctions.

Vocabulaire :

- Une fonction qui vérifie une équation différentielle est une **solution** de l'équation différentielle.
- **Résoudre** une équation différentielle sur un intervalle I c'est trouver toutes les fonctions définies sur I qui sont solutions de l'équation différentielle.
- **L'ordre** d'une équation différentielle correspond à l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation.

Exemple 1 :

- L'équation $y' = f$ est une équation différentielle dont l'ensemble des solutions est donnée par les primitives de la fonction f.
- L'équation $y' = y$ est une équation différentielle du premier ordre. La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est une solution de cette équation. La fonction $g(x) = e^{x+1}$ est aussi une solution de cette équation.
- L'équation $y'' = -y$ est une équation différentielle du second ordre (car il y a la dérivée seconde). Les fonctions trigonométriques $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ sont des solutions de cette équation.

Remarque : La solution d'une équation différentielle n'est pas unique : Les équations précédentes en possèdent une infinité. Lorsque l'on résout une équation différentielle, on cherche en général des fonctions définies le plus grand intervalle possible.

Exemple 2 : On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 6$.

Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-3x} + 2$ est une solution de l'équation (E).

On commence par dériver f : $f'(x) = 5 \times (-3) \times e^{-3x} = -15e^{-3x}$

On a $f'(x) + 3f(x) = -15e^{-3x} + 3 \times (5e^{-3x} + 2) = -15e^{-3x} + 15e^{-3x} + 6 = 6$

Ainsi, on a bien $f' = 3f + 6$ et donc f est une solution de l'équation (E)

Exemple 3 : On considère l'équation différentielle $(E') : y' - 4y = 3x + 1$.

Rechercher une solution à cette équation sous la forme d'une fonction affine

Soit $f(x) = ax + b$. $f'(x) - 4f(x) = a - 4(ax + b) = a - 4ax - 4b = -4ax + a - 4b$

La fonction f est solution si $-4ax + a - 4b = 3x - 1$.

Par identification, $\begin{cases} -4a = 3 \\ a - 4b = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -3/4 \\ -3/4 - 4b = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -3/4 \\ -3 - 16b = -4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -3/4 \\ b = 1/16 \end{cases}$

La fonction $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{16}$ est solution de l'équation (E')

2 – Equation $y' = ay$

Propriété 1 : On considère l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un nombre réel.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ où C une constante réelle.
- Il existe une unique solution à cette équation vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$ (où $x_0, k \in \mathbb{R}$).

Remarques :

- Soit $f(x) = Ce^{ax}$. On a bien $f'(x) = Cae^{ax} = af(x)$.
- L'unique fonction f vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$ est définie par $f(x) = ke^{a(x-x_0)}$.

Exemple 4 : Résoudre l'équation différentielle $y' = -4y$.

L'équation est sous la forme $y' = ay$ avec $a = -4$.

Les solutions sont donc les fonctions sous la forme $x \mapsto Ce^{-4x}$ avec C une constante réelle.

Exemple 5 : Résoudre l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 1$

$2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow 2y' = -5y \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{2}y$. L'équation est sous la forme $y' = ay$ avec $a = -\frac{5}{2} = -2.5$.

Les solutions sont donc les fonctions sous la forme $x \mapsto Ce^{-\frac{5}{2}x}$ avec C une constante réelle.

Or, $y(0) = 1$ donc $Ce^{-\frac{5}{2}\times 0} = 1$ d'où $C \times 1 = 1$ donc $C = 1$.

L'unique solution vérifiant la condition initiale est la fonction $f(x) = e^{-\frac{5}{2}x}$.

3 – Equation $y' = ay + b$

Propriété 1 : On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des nombres réels.

- Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C une constante réelle.
- Il existe une unique solution à cette équation vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$ (où $x_0, k \in \mathbb{R}$).

Remarques : Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ s'obtient en additionnant, les solutions $x \mapsto Ce^{ax}$ de l'équation dite **homogène** $y' = ay$ avec une solution **particulière**, la fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$.

Exemple 6 : On considère l'équation différentielle $3y' - 2y = 3$.

1) Trouver une fonction constante solution de cette équation différentielle

   Si $f(x) = k$ alors $f'(x) = 0$. f est solution de l'équation si $3 \times 0 - 2 \times k = 3 \Leftrightarrow -2k = 3 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$.

2) Déterminer les solutions générales de cette équation différentielle.

   $3y' - 2y = 3 \Leftrightarrow 3y' = 2y + 3 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y + 1$.

   L'équation est sous la forme $y' = ay + b$ avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = 1$

   Les solutions sont donc les fonctions sous la forme $x \mapsto Ce^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{2}$ avec C une constante réelle.

3) Déterminer l'unique solution vérifiant la condition initiale $y(1) = 2$

   $y(1) = 2$ donc $Ce^{\frac{2}{3}\times 1} - \frac{3}{2} = 2$ d'où $Ce^{\frac{2}{3}} = \frac{7}{2}$ donc $C = \frac{\frac{7}{2}}{e^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{2}e^{-\frac{2}{3}}$.

   L'unique solution vérifiant $y(1) = 2$ est la fonction $f(x) = \frac{7}{2}e^{-\frac{2}{3}} \times e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}e^{\frac{2}{3}(x-1)} - \frac{3}{2}$