Fiche A6.1 : Intégrale et « Aire sous la courbe »

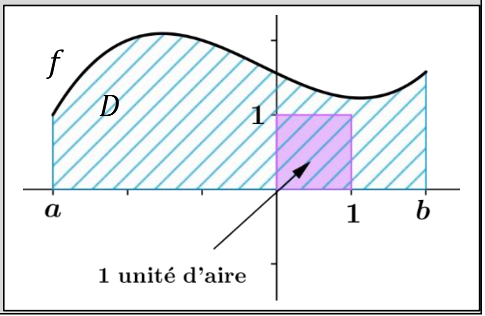
1 – Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition 1 : On considère une fonction f **continue** et **positive** sur un intervalle $I = [a; b]$.

On appelle **intégrale de f de a à b**, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$,

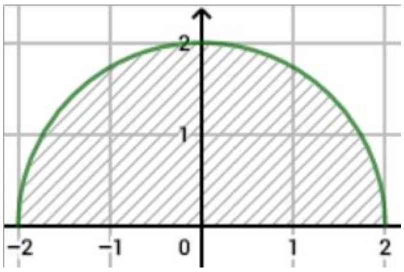
l'aire $\mathcal{A}(D)$ du domaine D délimitée par :

- L'axe des abscisses
- La courbe C_f représentative de la fonction f
- Les deux axes verticaux d'équation $x = a$ et $x = b$.



Exemple 1 : On considère la fonction définie sur l'intervalle $I = [-2; 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Sa courbe représentative est un demi-cercle centrée en l'origine du repère et de rayon $r = 2$. Calculer $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \mathcal{A}_{Demi-cercle} = \frac{1}{2} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi\ (u.a.)$



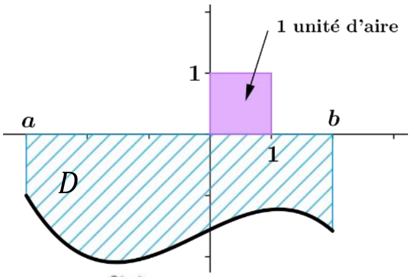
2 – Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle

La définition d'une intégrale s'étend aux fonctions négatives : On donne un signe positif aux portions qui sont situés au dessus de l'axe des abscisses et un signé négatif aux portions qui sont situées en dessous.

- Si f est une fonction continue et **négative** sur l'intervalle $I = [a; b]$ alors :

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est définie **l'opposée** de l'aire du domaine D délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les axes $x = a$ et $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}(D)$$

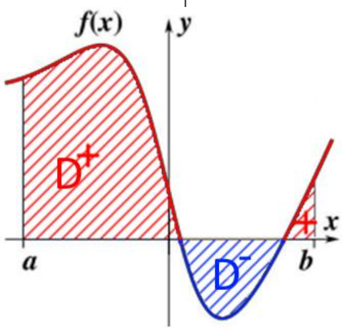


- Si f est continue de signe quelconque sur $I = [a; b]$ alors on découpe le domaine délimitée par l'axe O_x, la courbe de f et les axes $x = a$ et $x = b$:

  . D^+ est la partie du domaine situé au dessus de l'axe des abscisses.

  . D^- est la partie du domaine situé en dessous de l'axe des abscisses.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}(D^+) - \mathcal{A}(D^-)$$

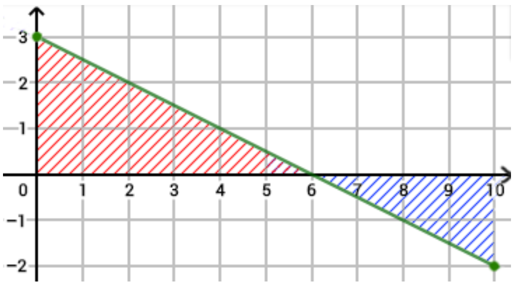


Exemple 2 : Soit f définie sur $I = [0; 10]$ par $f(x) = -0.5x + 3$.

Déterminer graphiquement la valeur de $\int_0^{10} f(x)\,dx$.

$\mathcal{A}(D^+) = \frac{\mathcal{B} \times h}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9$ et $\mathcal{A}(D^-) = \frac{\mathcal{B} \times h}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 3$

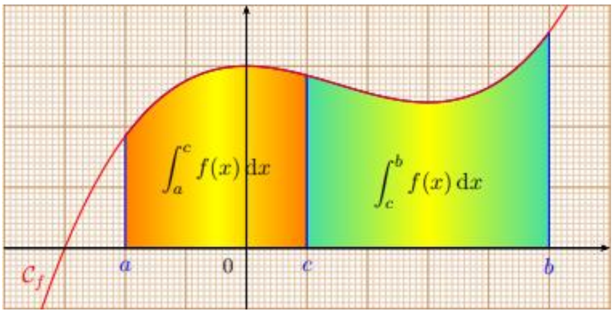
$\int_0^{10} f(x)\,dx = \mathcal{A}(D^+) - \mathcal{A}(D^-) = 9 - 3 = 6\ (u.a.)$



3 – Propriétés des intégrales

Propriété 1 (Relation de Chasles) : Soit f une fonction continue sur $I = [a; b]$ et c un nombre de I, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Remarque : Sur les bornes de l'intégrales on a aussi les deux propriétés suivantes :

• $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

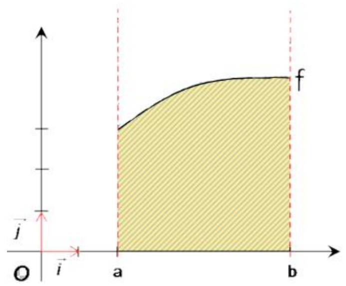
• $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

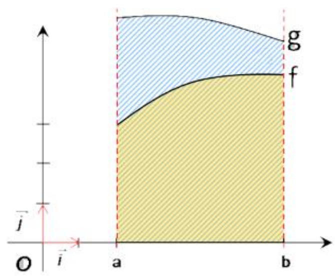
Propriété 2 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$.

• Si $f(x) \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

• Si $f(x) \leq 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

• Si $f(x) \leq g(x)$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$





4 – Approximation avec la méthode des rectangles

Pour approximer la valeur d'une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ on peut utiliser la méthode suivante :

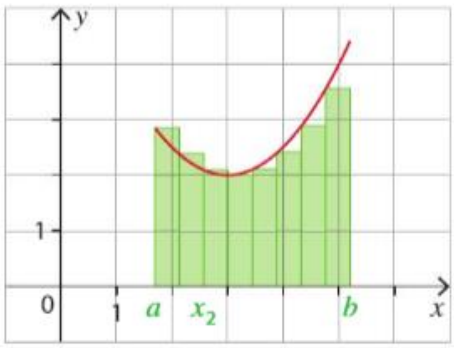
• On divise l'intervalle $[a; b]$ en n parties égales :

$$x_i = a + i \times \frac{b-a}{n} \text{ avec } 0 \leq i \leq n \;\; (x_0 = a \text{ et } x_n = b)$$

• On construit ainsi n rectangles sous la courbe de f de largeur $\frac{(b-a)}{n}$ et de hauteur $f(x_i)$ avec $0 \leq i \leq n-1$

• La valeur de l'intégrale est approximée par la somme des aires de ces rectangles : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)}{n} \times f(x_i) = \frac{(b-a)}{n} \times [f(x_0) + \cdots + f(x_n)]$

• Plus n est grand et plus l'approximation sera précise avec égalité lorsque n tend vers $+\infty$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} S_n$



On peut voir l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ comme une sorte de « somme continue » des valeurs de la fonction f entre a et b.