

Fiche A6.2 : Intégrales et Primitives

1 – Théorème fondamental

Théorème 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$.

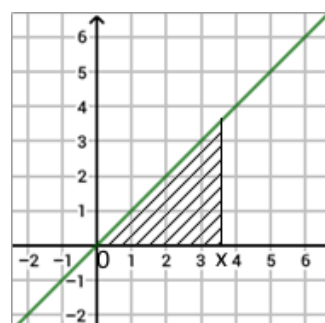
La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I , et on a $F'(x) = f(x)$

Remarque :

- En d'autres termes la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de la fonction f sur I .
- Dans l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$, la variable d'intégration doit être différente de x .

Exemple 1 : En utilisant le théorème précédent, on peut retrouver la primitive de la fonction $f(x) = x$

On prend $a = 0$ pour simplifier les calculs.



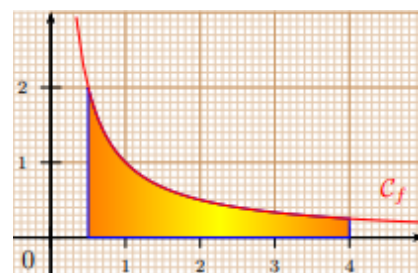
Théorème 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et F une primitive de la fonction f .

Alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

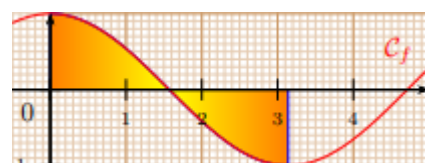
Remarque : Le résultat de $\int_a^b f(x) dx$ est indépendant du choix de la primitive car toutes les primitives de f diffèrent d'une constante : $F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a) + C - C = F(b) - F(a)$.

Notation : On note alors $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$.



Exemple 3 : $\int_0^\pi \cos x dx$



2 – Linéarité de l'intégrale

Propriété 1 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$ et k une constante réelle.

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b (k \times f(x)) dx = k \times \int_a^b f(x) dx$

Démonstration :

- Si F une primitive de f et G une primitive de g alors :
 - $F + G$ est une primitive de $f + g$ car $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
 - $k \times F$ est une primitive de F car $(k \times F)' = k \times F' = k \times f$
- On a donc :
$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [(F + G)(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= [(F)(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$
- De même :
$$\begin{aligned}\int_a^b (k \times f(x)) dx &= [(k \times F)(x)]_a^b \\ &= k \times F(b) - k \times F(a) \\ &= k \times [F(b) - F(a)] \\ &= k \times [(F)(x)]_a^b \\ &= k \times \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Remarque : Cette propriété permet de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction complexe, à une succession d'intégration de fonctions plus simples :

Exemple 4 : Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^2 6x + \frac{5}{x} dx$

- On décompose l'intégrale :
- On obtient en passant aux primitives :
- Finalement :

