Fiche A6.2 : Intégrales et Primitives

1 – Théorème fondamental

Théorème 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$.

La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I, et on a $F'(x) = f(x)$

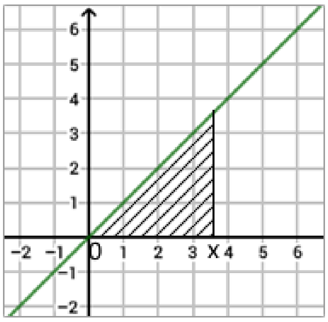
Remarque :

- En d'autres termes la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur I.
- Dans l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$, la variable d'intégration doit être différente de x.

Exemple 1 : En utilisant le théorème précédent, on peut retrouver la primitive de la fonction $f(x) = x$

On prend $a = 0$ pour simplifier les calculs.

Une primitive de la fonction $f(x) = x$ est alors donnée par la formule :



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \mathcal{A}_{Partie\ hachurée} = \frac{\mathcal{B} \times h}{2}$$

D'où $F(x) = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$

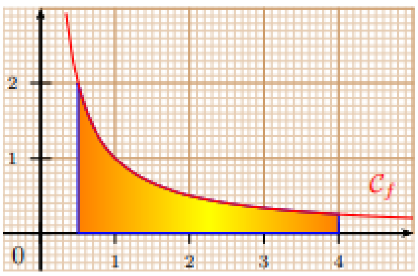
Théorème 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ et F une primitive de la fonction f.

Alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Remarque : Le résultat de $\int_a^b f(x)\,dx$ est indépendant du choix de la primitive car toutes les primitives de f diffèrent d'une constante : $F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a) + C - C = F(b) - F(a)$.

Notation : On note alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple 2 : Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$.

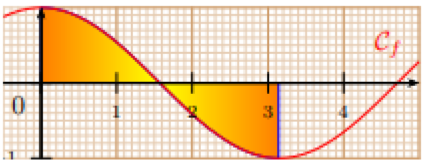


$$\mathcal{A}_{Domaine} = \int_{0.5}^4 f(x)\,dx$$

$F(x) = \ln x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_{0.5}^4 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{0.5}^4 = \ln 4 - \ln\frac{1}{2} = \ln 4 + \ln 2 = 2\ln 2 + \ln 2 = 3\ln 2$$

Exemple 3 : $\int_0^\pi \cos x\,dx$



$F(x) = \sin x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \cos x$

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = [\sin x]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

2 – **Linéarité de l'intégrale**

Propriété 1 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$ et k une constante réelle.

- $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
- $\int_a^b (k \times f(x))\, dx = k \times \int_a^b f(x)\, dx$

Démonstration :

- Si F une primitive de f et G une primitive de g alors :
  - $F + G$ est une primitive de $f + g$ car $(F + G)' = F' + G' = f + g$.
  - $k \times F$ est une primitive de F car $(k \times F)' = k \times F' = k \times f$
- On a donc : $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = [(F + G)(x)]_a^b$

$$= F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$$
$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$
$$= [(F)(x)]_a^b + [G(x)]_a^b$$
$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- De même : $\int_a^b \big(k \times f(x)\big)dx = [(k \times F)(x)]_a^b$

$$= k \times F(b) - k \times F(a)$$
$$= k \times [F(b) - F(a)]$$
$$= k \times [(F)(x)]_a^b$$
$$= k \times \int_a^b f(x)dx$$

Remarque : Cette propriété permet de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction complexe, à une succession d'intégration de fonctions plus simples :

Exemple 4 : Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_1^2 6x + \frac{5}{x}\, dx$

- On décompose l'intégrale : $I = \int_1^2 6x + \frac{5}{x}\, dx = \int_1^2 6x + \int_1^2 \frac{5}{x}\, dx = 3 \times \int_1^2 2x\, dx + 5 \times \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$
- On obtient en passant aux primitives : $I = 3 \times [x^2]_1^2 + 5 \times [\ln(x)]_1^2$
- Finalement, $I = 3 \times (2^2 - 1^2) + 5 \times (\ln(2) - \ln(1)) = 9 + 5\ln 2$