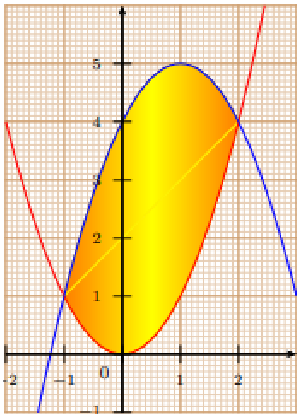
Fiche A6.3 : Applications

1 – Calcul de l'aire d'un domaine compris entre deux courbes

Propriété 1 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a; b]$ telle que pour tout x de I on a $f(x) \leq g(x)$. L'aire du domaine délimitée par leur courbe respective C_f et C_g et par les axes d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$

Exemple 14 : Calculer l'aire du domaine délimitée par les courbes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 4$, et les droites $x = -1$ et $x = 2$



On a $\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\, dx$

Une primitive de $g - f$ est donnée par la fonction $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = F(2) - F(-1) = \frac{20}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right)$$

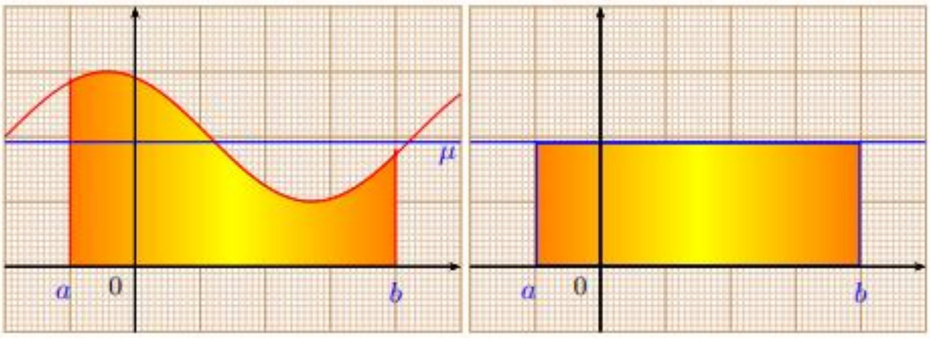
$$= \frac{27}{3} = 9\, u.a.$$

2 – Valeur moyenne d'une fonction

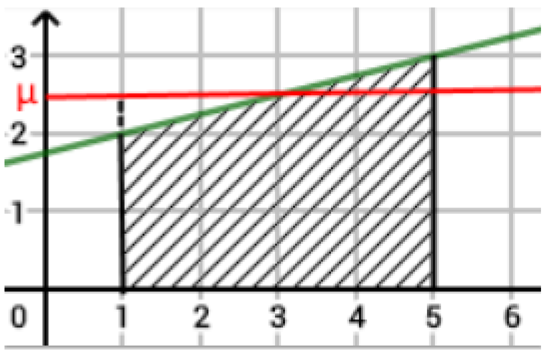
Définition 1 : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [a; b]$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur I le nombre réel : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$

Remarque : Le réel μ est le nombre tel que l'aire sous la courbe de f entre a et b soit égale à l'aire du rectangle dont les côtés ont pour mesures $b - a$ et μ.



Exemple 2 : Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ sur l'intervalle $I = [1; 5]$.



On a $\mu = \frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_1^5 \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}\, dx$

Une primitive de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{4}x$

$F(5) - F(1) = \frac{25}{8} + \frac{35}{4} - \frac{1}{8} - \frac{7}{4} = \frac{24}{8} + \frac{28}{4} = 3 + 7 = 10$

Donc $\mu = \frac{1}{4} \times 10 = 2.5$