

Fiche F1.3 : Suites arithmétiques

1 – Définition

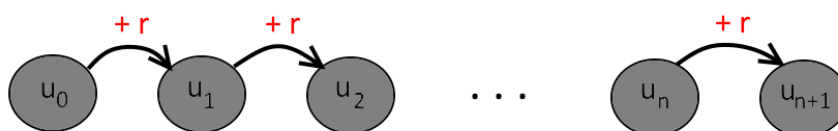
Définition 1 : On dit qu'une suite u est **arithmétique** si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé la **raison** de la suite.

Exemple 1 :

- La suite $u = (3; 6; 9; 12; 15; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $r = 3$
- La suite $v = (5; 3; 1; -1; -3; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $r = -2$
- La suite $w = (5; 10; 15; 20; 24; \dots)$ n'est pas arithmétique car on ajoute pas toujours le même nombre.

2 – Relation de récurrence

Propriété 1 : Si u est une suite **arithmétique** de raison r alors pour tout rang n , on a $u(n+1) = u(n) + r$



Exemple 2 :

- Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.
 $u = (1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$ et on a, pour tout rang n , la relation de récurrence $u(n+1) = u(n) + 2$.
- Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -3$.
 $v = (10; 7; 4; 1; -2; -5; \dots)$ et on a, pour tout rang n , la relation de récurrence $v(n+1) = v(n) - 3$.

Remarque : Une suite u est arithmétique si, pour tout rang n , la différence entre deux termes consécutifs $u(n+1) - u(n)$ est un nombre **constant**, qui correspond alors à la raison de la suite.

Exemple 3 : Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u(n) = 4n + 5$ est arithmétique

$$\begin{aligned} u(n+1) - u(n) &= 4(n+1) + 5 - (4n + 5) \\ &= 4n + 4 + 5 - 4n - 5 \\ &= 4 \end{aligned}$$

La différence entre deux termes consécutifs est donc toujours constante égal à 4.

Pour tout rang n , on a $u(n+1) - u(n) = 4$ c'est-à-dire $u(n+1) = u(n) + 4$

En conclusion la suite u est arithmétique de raison $r = 4$

Exemple 4 : La suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v(n) = n^2 + 1$.

On a $v(0) = 0^2 + 1 = 1$, $v(1) = 1^2 + 1 = 2$ et $v(2) = 2^2 + 1 = 5$.

On a donc $v(1) - v(0) = 2 - 1 = 1$ et $v(2) - v(1) = 5 - 2 = 3$

La différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. La suite n'est donc pas arithmétique.



3 – Représentation graphique et sens de variation

Propriété 2 : Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique est un nuage de points **alignés**.

Remarque : La différence d'ordonnée entre deux points successifs est donc constante et correspond alors à la raison de la suite. On parle d'évolution **linéaire**.

Propriété 3 : On considère une suite arithmétique u de raison r .

• Si $r > 0$ alors la suite u est **croissante**

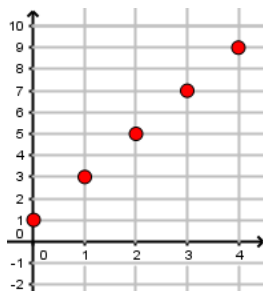
• Si $r < 0$ alors la suite u est **décroissante**

Remarque : Si $r = 0$ alors tous les termes de la suite sont égaux et on dit que la suite est **constante**.

Exemple 5 : Représenter graphiquement les suites ci-dessous et observer leur sens de variation.

• Suite arithmétique u avec :

$$u_0 = 1 ; r = 2$$

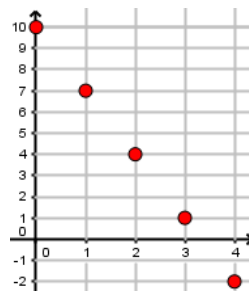


La raison est **positive**

u est **croissante**

• Suite arithmétique v avec :

$$v_0 = 10 ; r = -3$$

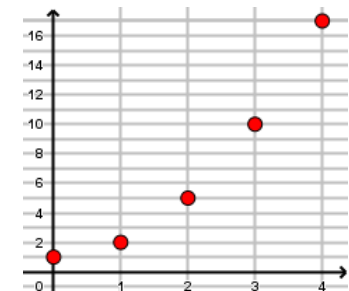


La raison est **négative**

v est **décroissante**

• Suite w définie par :

$$w(n) = n^2 + 1$$



Les points ne sont **pas alignés**

w n'est pas arithmétique

