

Fiche F1.4 : Suites géométriques

1 – Définition

Définition 1 : On dit qu'une suite u est **géométrique** si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre q appelé la **raison** de la suite.

Exemple 1 :

- La suite $u = (1; 5; 25; 125; 625; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $q = 5$
- La suite $v = (100; 50; 25; 12.5; 6.25; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $q = \frac{1}{2} = 0.5$
- La suite $w = (2; 4; 8; 12; 24; \dots)$ n'est pas géométrique car on multiplie pas toujours par le même nombre.

2 – Relation de récurrence

Propriété 1 : Si u est une suite **géométrique** de raison q alors pour tout rang n , on a $u(n+1) = u(n) \times q$



Exemple 2 :

- Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.
 $u = (1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots)$ et on a, pour tout rang n , la relation de récurrence $u(n+1) = u(n) \times 3$.
- Soit v la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
 $v = (10; 5; 2.5; 1.25; 0.625; \dots)$ et on a, pour tout rang n , la relation de récurrence $v(n+1) = v(n) \times 0.5$.

Remarque : Une suite u est géométrique si, pour tout rang n , le quotient entre deux termes consécutifs $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ est un nombre **constant**, qui correspond alors à la raison de la suite.

Exemple 3 : Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u(n) = 2^n$ est géométrique

$$\frac{u(n+1)}{u(n)} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n \times 2}{2^n} = 2$$

Le quotient entre deux termes consécutifs est donc toujours constant égal à 2.

Pour tout rang n , on a $\frac{u(n+1)}{u(n)} = 2$ c'est-à-dire $u(n+1) = u(n) \times 2$

En conclusion la suite u est géométrique de raison $q = 2$

Exemple 4 : La suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v(n) = n^2 + 1$ est-elle géométrique ?

On a $v(0) = 0^2 + 1 = 1$, $v(1) = 1^2 + 1 = 2$ et $v(2) = 2^2 + 1 = 5$.

On a donc $\frac{v(1)}{v(0)} = \frac{2}{1} = 2$ et $\frac{v(2)}{v(1)} = \frac{5}{2} = 2.5$

Le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant. La suite n'est donc pas géométrique.



3 – Représentation graphique et sens de variation

Propriété 2 : Une suite géométrique est représentée par un nuage de points de forme **exponentielle**.

Remarque : On parle de **croissance exponentielle** lorsque la différence d'ordonnée entre les points devient de plus en plus importante et de **décroissance exponentielle** lorsque la la différence d'ordonnée entre les points devient de plus en plus faible.

Propriété 3 : On considère une suite géométrique u de raison $q > 0$ et de 1^{er} terme positif.

- Si $q > 1$ alors la suite u est **croissante**
- Si $0 < q < 1$ alors la suite u est **décroissante**.

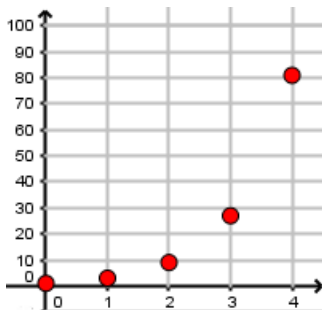
Remarques :

- Si $q = 1$ alors tous les termes de la suite sont égaux et on dit que la suite est **constante**.
- Lorsque le premier terme $u(0)$ est négatif, le sens de variation est inversé par rapport à la propriété.
- Lorsque la raison est négative, la suite oscille entre terme positif et terme négatif.

Exemple 5 : Représenter graphiquement les suites ci-dessous et observer leur sens de variation.

- Suite géométrique u avec :

$$u_0 = 1 ; q = 3$$

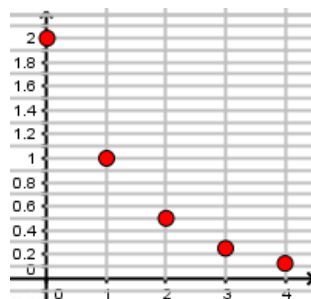


La raison est **supérieure à 1**

u est **croissante**

- Suite géométrique v avec :

$$v_0 = 2 ; q = \frac{1}{2}$$

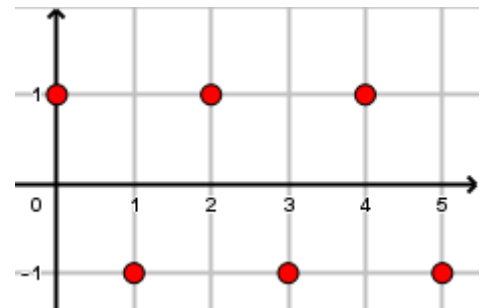


La raison est **inférieure à 1**

v est **décroissante**

- Suite géométrique w avec :

$$w_0 = 1 ; q = -1$$



La raison est inférieure à 0

w n'a pas de sens de variation

