

# Fiche P1.1 : Conditionnement & Indépendance

## 1 – Probabilités conditionnelles

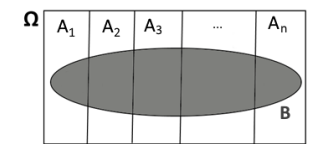
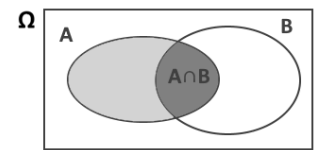
Rappel : Soit  $A$  et  $B$  deux évènements tel que  $P(A) \neq 0$ .

- On appelle **probabilité conditionnelle** de  $B$  sachant  $A$  le nombre défini par :

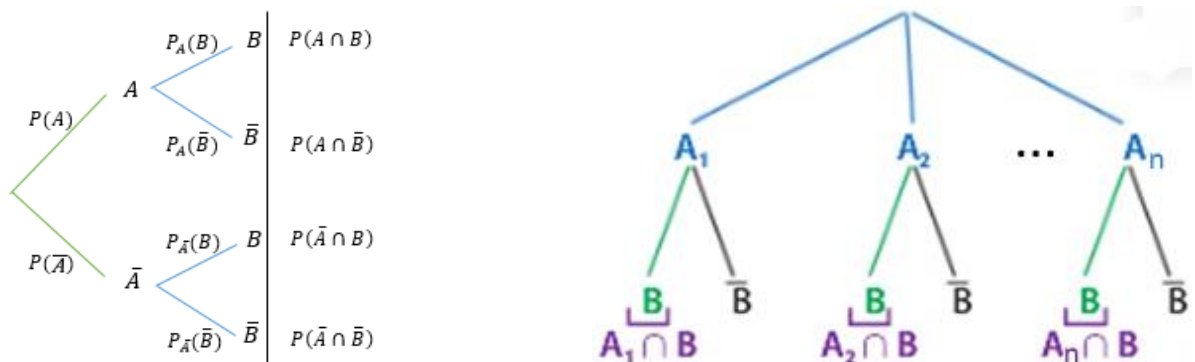
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- On a donc :  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$ .
- Si les évènements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une **partition** de l'univers  $\Omega$ , on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$



Arbre pondérées : Dans le cadre des probabilités conditionnelles, il est pratique de représenter la situation étudiée avec un arbre pondéré où l'on peut utiliser les trois règles suivantes :



- Règle 1** : Sur un même nœud, la somme des probabilités vaut 1.
- Règle 2** : La probabilité d'un chemin, est le produit des probabilités des branches de ce chemin.
- Règle 3** : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à celui-ci.

Propriété 1 : (Formule de Bayes) : Soit  $A$  et  $B$  deux évènements de probabilités non nulles.

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Remarque : Cette formule permet d'inverser le conditionnement dans une probabilité conditionnelle. Elle est à la base de *l'inférence bayésienne*, une méthode statistique qui permet de calculer la probabilité d'une hypothèse à partir de l'observation d'évènements connus.

## 2 – Indépendance

Rappel : Soit  $A$  et  $B$  deux évènements de probabilités non nulles.

- On dit que  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre :

$$P_A(B) = P(B) \text{ et } P_B(A) = P(A).$$

- Deux évènements sont **indépendants** si et seulement si :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

Exemple 1 : Un virus touche une personne sur 10 000. Un test de dépistage est mis sur le marché avec une excellente fiabilité : le test indique « Positif » dans 99% des cas où la personne est malade et « Négatif » dans 99.9% des cas où la personne n'est pas malade.

Problématique : Si vous obtenez un test « positif », quel est votre risque d'être réellement malade ?

On choisit un individu au hasard dans la population de référence et on définit les deux évènements suivants :

$M$  : « L'individu est malade » et  $T$  : « Son test est positif »

- 1) a. Exprimer en termes de probabilité les données présentes dans l'énoncé.  
b. Déterminer la probabilité d'avoir un *faux-positif* et celle d'avoir un *faux négatif*.
- 2) Réaliser un arbre pondéré pour représenter cette situation.
- 3) a. Déterminer la *précision* du test c'est-à-dire la probabilité que le test donne le bon résultat.  
b. Calculer le *taux de positivité* du test dans la population.
- 4) La *valeur prédictive positive* (VPP) d'un test est la probabilité que l'individu soit malade lorsque son test est positif et la *valeur prédictive négative* (VPN) est celle qu'il ne le soit pas lorsque son test est négatif.  
a. Utiliser la formule de Bayes pour exprimer  $P_T(M)$  en fonction de  $P_M(T)$ .  
b. En déduire la valeur prédictive positive du test et répondre à la problématique.  
c. De la même façon calculer la valeur prédictive négative (VPN) du test.
- 5) a. Compléter le tableau d'effectifs suivant donné pour une population d'1 *Millions* d'individus :

	Test positif	Test Négatif	Total
Malade			
Sain			
Total			

- b. Comment expliquer peut-on alors expliquer le « paradoxe » lié à la problématique ?
- 6) Dans un contexte épidémique, la prévalence de la maladie c'est-à-dire la proportion de personne porteur du virus dans la population varie au cours du temps. Cette prévalence sera noté  $p$ .  
a. Exprimer en fonction de  $p$ , la *VPP* du test.  
b. Déterminer la *VPP* du test lorsque le virus touche 1 personne sur 1000  
c. A partir de quelle prévalence  $p$ , la *VPP* du test dépasse-t-elle 50 % ?

Exemple 2 : L'Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies (OFDT) a réalisé une enquête auprès des jeunes de 18 à 25 ans sur leur consommation de tabac et d'alcool. Parmi les personnes interrogés :

- 78 % d'entre eux déclarent consommer de l'Alcool (au moins une fois lors du dernier mois)
- Parmi ceux qui consomment de l'alcool, 43 % d'entre eux déclarent consommer également du tabac.
- Parmi ceux qui ne consomment pas d'alcool, 15 % d'entre eux déclarent consommer du tabac.

On interroge un jeune au hasard. Les évènements suivants sont-ils indépendants ?

$A$  : « La personne interrogée consomme de l'alcool » et  $B$  : « La personne interrogée consomme du tabac »

