Fiche P1.1 : Conditionnement & Indépendance

1 – Probabilités conditionnelles

Rappel : Soit A et B deux évènements tel que $P(A) \neq 0$.

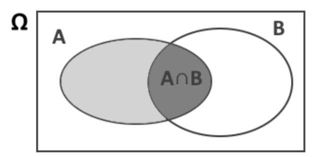
● On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A le nombre défini par :

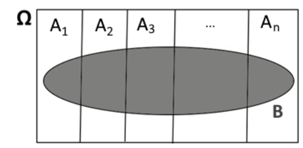
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

● On a donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

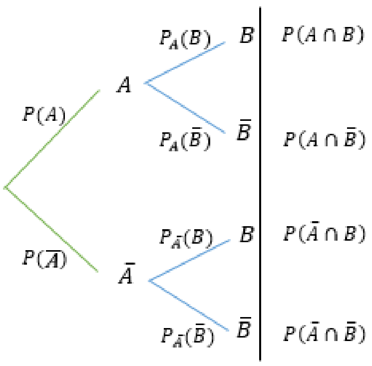
● Si les évènements $A_1, A_2, \ldots A_n$ forment une **partition** de l'univers Ω, on a :

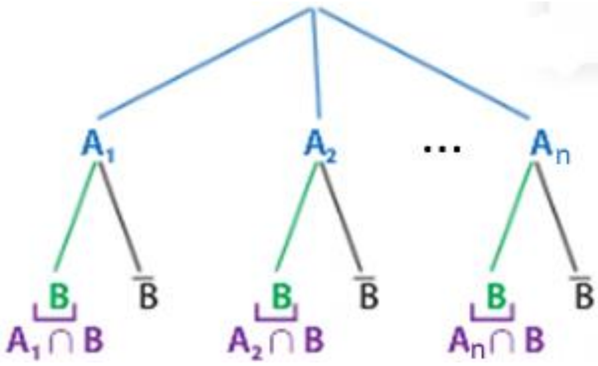
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$





Arbre pondérées : Dans le cadre des probabilités conditionnelles, il est pratique de représenter la situation étudiée avec un arbre pondéré où l'on peut utiliser les trois règles suivantes :





● Règle 1 : Sur un même nœud, la somme des probabilités vaut 1.

● Règle 2 : La probabilité d'un chemin, est le produit des probabilités des branches de ce chemin.

● Règle 3 : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à celui-ci.

Propriété 1 : (Formule de Bayes) : Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Remarque : Cette formule permet d'inverser le conditionnement dans une probabilité conditionnelle. Elle est à la base de *l'inférence baysienne*, une méthode statistique qui permet de calculer la probabilité d'une hypothèse à partir de l'observation d'évènements connus.

2 – Indépendance

Rappel : Soit A et B deux évènements de probabilités non nulles.

● On dit que A et B sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre :

$P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.

● Deux évènements sont **indépendants** si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

<u>Exemple 1 :</u> Un virus touche une personne sur 10 000. Un test de dépistage est mis sur le marché avec une excellente fiabilité : le test indique « Positif » dans 99% des cas où la personne est malade et « Négatif » dans 99.9% des cas où la personne n'est pas malade.

Problématique : Si vous obtenez un test « positif », quel est votre risque d'être réellement malade ?

On choisit un individu au hasard dans la population de référence et on définit les deux évènements suivants :

M : « L'individu est malade » et T : « Son test est positif »

1) a. Exprimer en termes de probabilité les données présentes dans l'énoncé.

   b. Déterminer la probabilité d'avoir un *faux-positif* et celle d'avoir un *faux négatif*.

2) Réaliser un arbre pondéré pour représenter cette situation.

3) a. Déterminer la *précision* du test c'est-à-dire la probabilité que le test donne le bon résultat.

   b. Calculer le *taux de positivité* du test dans la population.

4) La *valeur prédictive positive* (VPP) d'un test est la probabilité que l'individu soit malade lorsque son test est positif et la *valeur prédictive négative* (VPN) est celle qu'il ne le soit pas lorsque son test est négatif.

   a. Utiliser la formule de Bayes pour exprimer $P_T(M)$ en fonction de $P_M(T)$.

   b. En déduire la valeur prédictive positive du test et répondre à la problématique.

   c. De la même façon calculer la valeur prédictive négative (VPN) du test.

5) a. Compléter le tableau d'effectifs suivant donné pour une population d'1 $Millions$ d'individus :

	Test positif	Test Négatif	Total
Malade			
Sain			
Total			

   b. Comment expliquer peut-on alors expliquer le « paradoxe » lié à la problématique ?

6) Dans un contexte épidémique, la prévalence de la maladie c'est-à-dire la proportion de personne porteur du virus dans la population varie au cours du temps. Cette prévalence sera noté p.

   a. Exprimer en fonction de p, la VPP du test.

   b. Déterminer la VPP du test lorsque le virus touche 1 personne sur 1000

   c. A partir de quelle prévalence p, la VPP du test dépasse-t-elle 50 % ?

<u>Exemple 2</u> : L'Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies (OFDT) a réalisé une enquête auprès des jeunes de 18 à 25 ans sur leur consommation de tabac et d'alcool. Parmi les personnes interrogés :

• 78 % d'entre eux déclarent consommer de l'Alcool (au moins une fois lors du dernier mois)

• Parmi ceux qui consomment de l'alcool, 43 % d'entre eux déclarent consommer également du tabac.

• Parmi ceux qui ne consomment pas d'alcool, 15 % d'entre eux déclarent consommer du tabac.

On interroge un jeune au hasard. Les évènements suivants sont-ils indépendants ?

A : « La personne interrogée consomme de l'alcool » et B : « La personne interrogée consomme du tabac »