Fiche P1.2 : Loi Uniforme discrète

1 – Rappels sur les variables aléatoires discrètes

Rappel : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- Une **variable aléatoire** X est une fonction qui à chaque issue w de Ω associe un unique nombre réel.
- Lorsque la variable est **discrète**, on note $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ l'ensemble des **valeurs possibles** pour X.
- La **loi de probabilité** de X est l'ensemble des probabilités $p_i = P(X = x_i)$ avec $x_i \in E$
- L'**espérance** de X est le nombre : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$
- La **variance** de X est le nombre : $V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + (x_2 - E(X))^2p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2p_n$

  L'**écart-type** est le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Explication : Une variable aléatoire est donc un nombre, une variable numérique X dont la valeur dépend du hasard : En fonction de l'issue de l'expérience aléatoire, la variable prend tel ou tel valeur. La loi d'une variable aléatoire permet de définir avec quelle probabilité la variable prend chacune des valeurs possible. L'espérance est en quelque sorte la valeur moyenne de la variable, sur le long terme. L'écart type permet quant à lui de mesurer comment seront dispersés les valeurs de la variable autour de l'espérance.

2 – Loi uniforme sur $\{1; 2; 3; \dots; n\}$

Définition 1 : On dit qu'une variable X suit la **loi uniforme** sur $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ et on note $X \sim \mathcal{U}(n)$ si :

Pour tout $k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$, on a $P(X = k) = \frac{1}{n}$

Exemple 1 : On choisit au hasard un jour du mois de Janvier et on note X le numéro du jour choisi.

____

Propriété 1 : Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ alors on a :

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$ (admis)

Exemple 1 : $E(X) =$ et $Var(X) =$ et donc $\sigma(X) =$

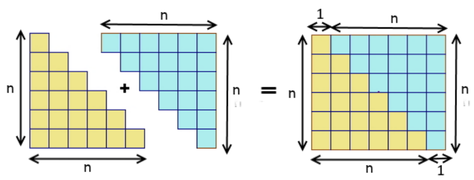
Démonstration : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1; 2; 3; \dots; n\}$

- La variable X prend les valeurs ______________ avec la même probabilité : ________________________________
- $E(X) =$

  $E(X) =$

  Or $1 + 2 + 3 + \cdots + n =$

  D'où, $E(X) =$



____