Fiche F2.1 : Probabilités conditionnelles

1 – Rappels sur les probabilités

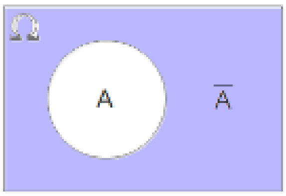
- Une expérience est dite **aléatoire** lorsque l'on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat avec certitude.
- **L'univers**, noté Ω, est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience qui sont appelées des **issues.**
- Un **évènement** est une condition qui peut ou non être réalisé : C'est un ensemble d'issues $A \subset \Omega$.

Propriété 1 : On considère une expérience aléatoire d'univers Ω ainsi que deux évènements A et B.

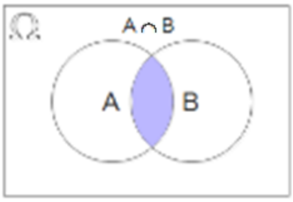
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le compose.
- Si on est dans une situation **d'équiprobabilité**, alors $P(A) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ total}$.
- On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Opération sur les évènements :

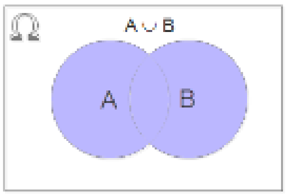
Contraire : $non\ A$



Intersection : $A\ et\ B$



Réunion : $A\ ou\ B$



Exemple 1 : Dans un jeu de 52 cartes on pioche une carte au hasard.

1) a. Justifier qu'il s'agit bien d'une **expérience aléatoire.**

Il s'agit d'une expérience dont on ne peut prévoir le résultat à l'avance

b. Quel est **l'univers** associé à cette expérience aléatoire ?

L'univers noté Ω est l'ensemble des résultats possibles de l'expérience : $\Omega = \{A♠ ; A♡; A◆; A♣ ; \dots ; 2♣\}$

c. Donner une **issue** possible.

Une issue est un des résultats possibles de l'expérience, par exemple $D♡$. On note alors $D♡ \in \Omega$

d. Est-t-on dans une situation **d'équiprobabilité** ?

Oui, car toutes les issues ont la même probabilité : on a autant de chance de piocher chaque carte.

2) Ecrire les **événements** suivants sous forme d'ensemble puis calculer leur **probabilité** :

A : « Piocher un coeur » : $A = \{A♡;\ R♡; D♡; \dots ; 2♡\}$. On a $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

B : « Piocher une figure » : $B = \{R♠; D♠; V♠; \dots ; V♣\}$. On a $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \approx 0.23 \approx 23\%$

3) a. Calculer la probabilité de **ne pas** piocher de figure

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.25 = 0.75 = 75\%$

b. Calculer la probabilité de piocher un cœur **et** une figure

$A \cap B = \{R♡; D♡; V♡\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{3}{52} \approx 0.06 \approx 6\%$

c. Calculer la probabilité de piocher un cœur **ou** une figure

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} + \frac{12}{52} - \frac{3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26} \approx 0.42 \approx 42\%$

2 – Probabilités conditionnelles

Définition 1 : On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A, et on note $P_A(B)$, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

Exemple 2 : Toujours dans un jeu de 52 cartes on considère les deux évènements suivants :

A : « $Piocher\ une\ figure\ rouge$ » B: "$Piocher\ un\ Roi$"

- $P(A) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26} \approx 0.12$
- $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0.08$

- $P_A(B)$ désigne la probabilité de piocher un Roi sachant que c'est une figure rouge.
  On pioche donc parmi les 6 cartes « Figures Rouges » et il y a 2 Cartes « Roi » donc $P_A(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- $P_B(A)$ désigne la probabilité de piocher une figure rouge sachant que c'est Roi.
  On pioche cette fois-ci parmi les 4 Rois dont seulement 2 sont des figures rouges donc $P_B(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Remarques : Pour le calcul de $P_A(B)$, on ne raisonne plus avec le nombre total d'issues de Ω mais seulement avec le nombre d'issues de l'évènement A. Attention, en règle général, $P_A(B) \neq P_B(A)$.

Notation : Pour un évènement A, on note $card(A)$ le nombre d'issue de A.

Propriété 2 : Dans une situation d'équiprobabilité, si A est un évènement tel que $card(A) \neq 0$, alors on a :

$$P_A(B) = \frac{card(A \cap B)}{card(A)}$$

Exemple 3 : Dans l'exemple précédent on a $card(A) = 6$; $card(B) = 4$ et $card(A \cap B) = 2$.
On retrouve alors les probabilités conditionnelles : $P_A(B) = \frac{card(A\cap B)}{card(A)} = \frac{2}{6}$ et $P_B(A) = \frac{card(A\cap B)}{card(B)} = \frac{2}{4}$

Remarque : Il est facile de calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau croisé d'effectifs.

Exemple 4 : Le tableau suivant donne la répartition des salariés d'une entreprise en fonction de leur sexe et de leur salaire (voir fiche précédente). On choisit un employé au hasard dans l'entreprise et on considère les deux évènements suivants : A: « L'employé est un Homme » et B: « L'employé gagne moins de 2000 € ».

	$< 2000€\ (B)$	$\geq 2000€\ (\bar{B})$	$Total$
$Homme\ (A)$	$96\ (card(A \cap B))$	$75\ (card(A \cap \bar{B}))$	$171\ (card(A))$
$Femme\ (\bar{A})$	$104\ (card(\bar{A} \cap B))$	$25\ (card(\bar{A} \cap \bar{B}))$	$129\ (card(\bar{A}))$
$Total$	$200\ (card(B))$	$100\ (card(\bar{B}))$	$300\ (card(\Omega))$

- $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{171}{300} = 0.57$
- $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$
- $A \cap B$: « L'employé est un Homme gagnant moins de 2000 € »

$P(A \cap B) = \frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)} = \frac{96}{300} = 0.32$

- $A \cup B$: « L'employé est un Homme ou gagne moins de 2000 € »

$P(A \cup B) = \frac{card(A)+card(B)-card(A\cap B)}{300} = \frac{171+200-96}{300} = \frac{275}{300} = \frac{11}{12}$ ou bien $P(A \cup B) = \frac{96+75+104}{300} = \frac{275}{300} = \frac{11}{12}$

- $P_A(B)$ désigne la probabilité de choisir un salarié qui gagne moins de 2000€ sachant que c'est un homme

$P_A(B) = \frac{card(A\cap B)}{card(A)} = \frac{96}{171}$

- $P_B(A)$ désigne la probabilité de choisir un homme sachant que c'est un salarié qui gagne moins de 2000€

$P_B(A) = \frac{card(A\cap B)}{card(B)} = \frac{96}{200}$