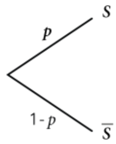
Fiche P1.3 : Loi de Bernoulli et Loi binomiale

1 – Loi de Bernoulli



Epreuve de Bernoulli : Expérience aléatoire à deux issues : **Succès** noté S et **Echec** noté $\bar{S}$.

On note p la probabilité du succès et q celle de l'échec : $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = q = 1 - p$.

Définition 1 : On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. On dit alors que X suit la **loi de Bernouilli** de paramètre p et on note $X \sim b(p)$.

On a alors $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

Exemple 1 : Un joueur de tennis professionnel possède un taux de réussite au service de $75\ \%$.

La réalisation d'un service par le joueur constitue alors une épreuve de bernouilli.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'echec.

Dans ce cas X suit la loi de Bernouilli de paramètre $p =$ ________

On a alors $P(X = 1) =$ __________ et $P(X = 0) =$ ______________________

Propriété 1 : Si $X \sim b(p)$ alors on a $E(X) = p$ et $Var(X) = p(1-p)$ (admis)

Démonstration : Si $X \sim b(p)$ alors on a $E(X) =$ ____ =____

Exemple 1 (Suite) : Comme $X \sim b(0.75)$ on a alors $E(X) =$ ____ et $Var(X) =$ ______________________.

2 – Schéma de Bernouilli

Définition 2 : Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p, est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, et de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Remarque : Deux épreuves sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur celui de l'autre.

Exemple 2 : Le joueur réalise une série de trois services consécutifs. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n =$ …… et $p =$ …… On peut représenter un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré :

1) Quelle est la probabilité qu'il réussisse ces trois services.

2) Quelle est la probabilité qu'il rate tous ces services

3) Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement un service.

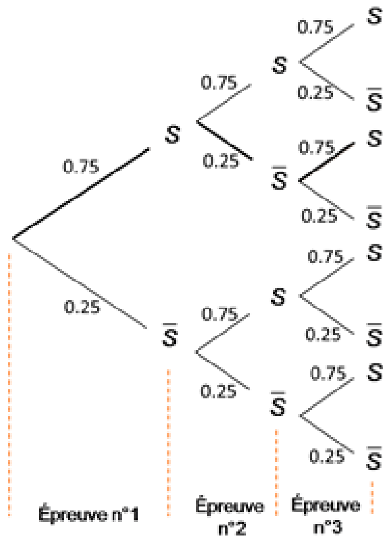
4) Quelle est la probabilité qu'il rate exactement un service.

5) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un service

$\boxed{3}$ – Loi binomiale

Définition 3 : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des n épreuves. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \sim B(n;p)$.

Exemple 3 : On note X le nombre de services réussis sur les trois services réalisés. On a donc $X \sim$…………………

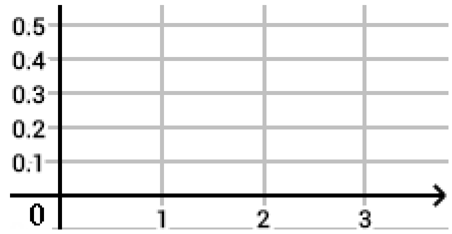


………….
………….
………….
………….
………….
………….
………….
………….

1) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

2) Calculer la loi de X puis la représenter avec un histogramme.

Valeurs					**Total**
Probabilités					



Lorsque le nombre de répétition est grand, on utilise la calculatrice pour calculer $P(X=k)$ ou $P(X \leq k)$

Casio : $\boxed{\text{Menu}}$ / $\boxed{STAT}$ puis $\boxed{DIST}$ $(F5)$/ $\boxed{BINM}$ $(F5)$

- Pour calculer $P(X=k)$: $\boxed{Bpd}$ $(F1)$
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{Bcd}$ $(F2)$
- On complète de la façon suivante :

. $Data$: $\boxed{Var}$ $(F2)$

. x : Nombre de succès (k)

. $Numtrial$: Nombre d'épreuves (n)

. p : Probabilité du succès (p)

TI : $\boxed{\text{Distr}}$ ($\boxed{\text{2nd}}$ / $\boxed{\text{Vars}}$). On descend avec la flèche :

- Pour calculer $P(X=k)$: $\boxed{BinomFdp(}$ (0)
- Pour calculer $P(X \leq k)$: $\boxed{BinomFRép(}$ (A)
- On utilise la syntaxe suivante $BinomFdp(n,p,k)$ ou $BinomFRép(n,p,k)$ avec :

. k : Nombre de succès

. n : Nombre d'épreuves

. p : Probabilité du succès

Exemple 4 : Notre joueur de tennis effectue une série de 10 services. On note X le nombre de succès.

1) Quelle est la loi suivie par la variable X ?

2) Calculer la probabilité qu'il réussisse :

. Exactement 5 services :

. Au maximum 8 services :

. Au moins 8 services :

Propriété 2 : Si $X \sim B(n;p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Exemple 5 : Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable X de l'exemple précédent.

$E(X) =$

$V(X) =$