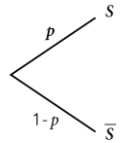


Fiche P1.3 : Loi de Bernoulli et Loi binomiale

1 – Loi de Bernoulli

Epreuve de Bernoulli : Expérience aléatoire à deux issues : **Succès** noté S et **Echec** noté \bar{S} .

On note p la probabilité du succès et q celle de l'échec : $P(S) = p$ et $P(\bar{S}) = q = 1 - p$.



Définition 1 : On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

On dit alors que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \sim b(p)$.

On a alors $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

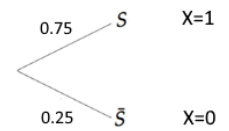
Exemple 1 : Un joueur de tennis professionnel possède un taux de réussite au service de 75 %.

La réalisation d'un service par le joueur constitue alors une épreuve de Bernoulli.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Dans ce cas X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{4} = 0.75$: $X \sim b(0.75)$.

On a alors $P(X = 1) = 0.75$ et $P(X = 0) = 1 - 0.75 = 0.25$



Propriété 1 : Si $X \sim b(p)$ alors on a $E(X) = p$ et $Var(X) = p(1 - p)$ (admis)

Démonstration : Si $X \sim b(p)$ alors on a $E(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$

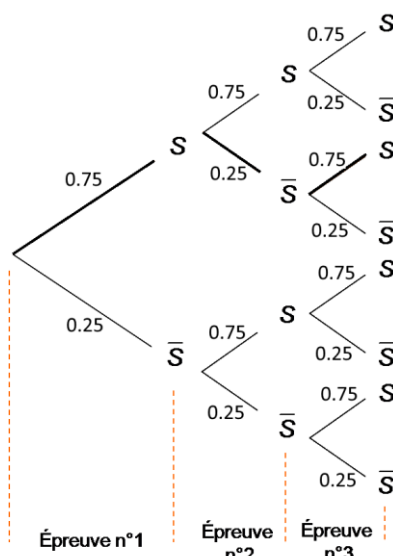
Exemple 1 (Suite) : Comme $X \sim b(0.75)$ on a alors $E(X) = 0.75$ et $Var(X) = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

2 – Schéma de Bernoulli

Définition 2 : Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p , est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois, et de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Remarque : Deux épreuves sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur celui de l'autre.

Exemple 2 : Le joueur réalise une série de 3 services consécutifs. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0.75$. On peut représenter un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré :



1) Quelle est la probabilité qu'il réussisse ces trois services.

$$P(SSS) = 0.75 \times 0.75 \times 0.75 = 0.75^3 \approx 0.421$$

2) Quelle est la probabilité qu'il rate tous ces services

$$P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 0.25^3 \approx 0.016$$

3) Quelle est la probabilité qu'il réussisse exactement un service.

$$P(S\bar{S}\bar{S}) + P(\bar{S}S\bar{S}) + P(\bar{S}\bar{S}S) = 3 \times 0.75 \times 0.25^2 = 0.141$$

4) Quelle est la probabilité qu'il rate exactement un service.

$$P(\bar{S}SS) + P(S\bar{S}S) + P(SS\bar{S}) = 3 \times 0.75^2 \times 0.25 = 0.421$$

5) Quelle est la probabilité qu'il réussisse au moins un service.

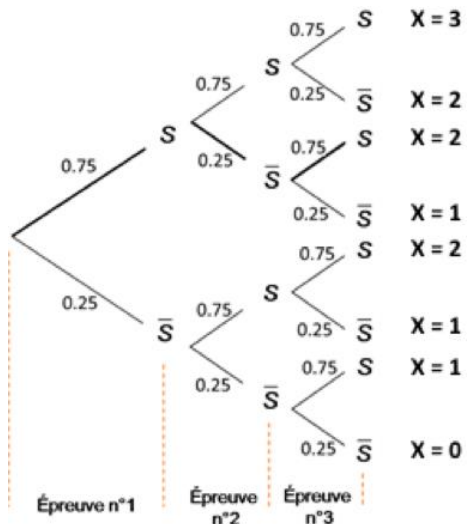
$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = 1 - 0.016 = 0.984$$



3 – Loi binomiale

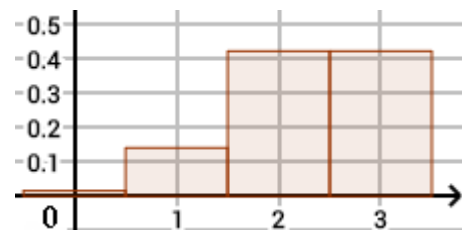
Définition 3 : Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue des n épreuves. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \sim B(n; p)$.

Exemple 3 : On note X le nombre de services réussis sur les trois services réalisés. On a donc $X \sim B(3; 0.75)$



- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
 X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3
- 2) Calculer la loi de X puis la représenter avec un histogramme.

Valeurs	0	1	2	3	Total
Probabilités	0.016	0.141	0.422	0.422	1



- $P(X = 0) = 0.016$
- $P(X = 1) = 0.141$
- $P(X = 2) = 0.442$
- $P(X = 3) = 0.442$

Lorsque le nombre de répétition est grand, on utilise la calculatrice pour calculer $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$

Casio : `Menu` / `STAT` puis `DIST` (F5) / `BINM` (F5)

- Pour calculer $P(X = k)$: `Bpd` (F1)
- Pour calculer $P(X \leq k)$: `Bcd` (F2)
- On complète de la façon suivante :
 - . `Data` : `Var` (F2)
 - . `x` : Nombre de succès (k)
 - . `Numtrial` : Nombre d'épreuves (n)
 - . `p` : Probabilité du succès (p)

TI : `Distr` (`2nd` / `Vars`). On descend avec la flèche :

- Pour calculer $P(X = k)$: `BinomFdp` () (0)
- Pour calculer $P(X \leq k)$: `BinomFRép` () (A)
- On utilise la syntaxe suivante `BinomFdp(n, p, k)` ou `BinomFRép(n, p, k)` avec :
 - . `k` : Nombre de succès
 - . `n` : Nombre d'épreuves
 - . `p` : Probabilité du succès

Exemple 4 : Notre joueur de tennis effectue une série de 10 services. On note X le nombre de succès.

- 1) Quelle est la loi suivie par la variable X ?
 X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0.75 : $X \sim B(10; 0.75)$
- 2) Calculer la probabilité qu'il réussisse :
 - . Exactement 5 services : $P(X = 5) = 0.058$
 - . Au maximum 8 services : $P(X \leq 8) = 0.756$
 - . Au moins 8 services : $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.474 = 0.526$

Propriété 2 : Si $X \sim B(n; p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

Exemple 5 : Calculer l'espérance et l'écart-type de la variable X de l'exemple précédent.

$E(X) = 10 \times 0.75 = 7.5$. Le nombre moyen de 1^{er} service réussi par le joueur est 7.5

$V(X) = 10 \times 0.75 \times (1 - 0.75) = 10 \times 0.75 \times 0.25 = 1.875$ d'où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.875} \approx 1.37$