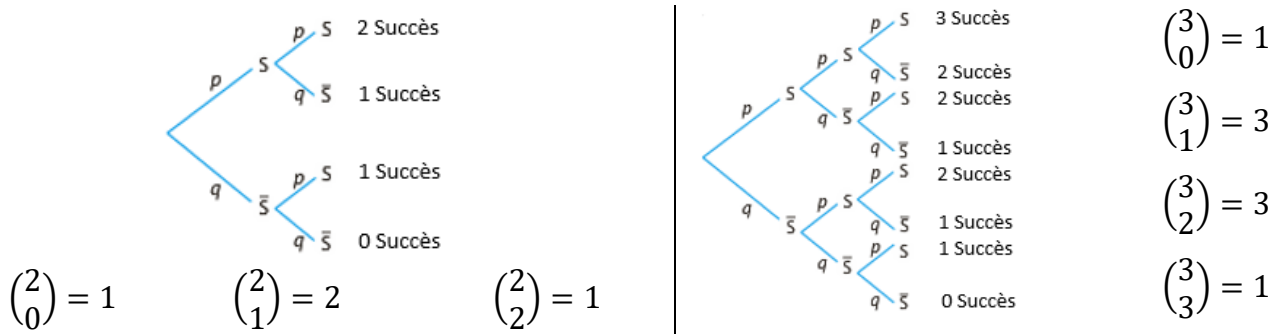


Fiche P1.4 : Coefficients binomiaux et loi binomiale

1 – Coefficients binomiaux

Définition 1 : Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ (avec $0 \leq k \leq n$) est le nombre de chemins qui mènent à k succès pour n répétitions dans l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Exemple 1 : Coefficients binomiaux dans les cas $n = 2$ et $n = 3$:



Triangle de Pascal : En pratique, on utilise le triangle de Pascal pour déterminer les $\binom{n}{k}$.

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|---|----|----|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

- On complète que la partie inférieure du tableau ($k \leq n$)
- On met des « 1 » sur la 1^{ère} colonne et sur la diagonale.
- Chaque nombre du triangle s'obtient en additionnant deux nombres de la ligne précédente : Celui du dessus avec celui de la colonne précédente.

Exemple 2 : On peut lire par exemple que : $\binom{2}{0} = 1$; $\binom{4}{1} = 4$; $\binom{4}{3} = 4$; $\binom{5}{2} = 10$

Propriété 1 : Soit n un entier naturel et k un entier naturel tel que $k \leq n - 1$

- On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- On a $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- **Formule de Pascal :** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

2 – Application à la loi binomiale

Propriété 2 : Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p , alors pour tout k compris entre 0 et n on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p$$

Remarque : On pourra retenir le principe suivant : $P(X = k) = \overset{\text{Nombre de chemins}}{\binom{n}{k}} \times \overset{\text{Nombre}}{p^k} \times \overset{\text{Nombre}}{q^{n-k}}$

Exemple 3 : On lance 5 fois un dé bien équilibré. Quel est la probabilité d'avoir exactement deux « 6 ».

Soit X le nombre de « 6 » obtenus. X compte le nombre de succès sur les 5 épreuves : On a $X \sim B(5; \frac{1}{6})$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.16.$$