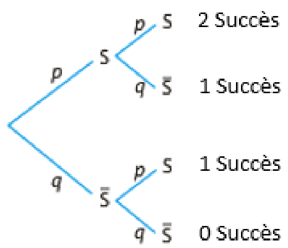
Fiche P1.4 : Coefficients binomiaux et loi binomiale

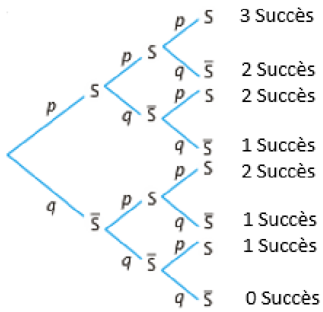
1 – Coefficients binomiaux

Définition 1 : Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ (avec $0 \leq k \leq n$) est le nombre de chemins qui mènent à k succès pour n répétitions dans l'arbre d'un schéma de Bernouilli.

Exemple 1 : Coefficients binomiaux dans les cas $n = 2$ et $n = 3$:



$\binom{2}{0} =$ $\binom{2}{1} =$ $\binom{2}{2} =$



$\binom{3}{0} =$

$\binom{3}{1} =$

$\binom{3}{2} =$

$\binom{3}{3} =$

Triangle de Pascal : En pratique, on utilise le triangle de Pascal pour déterminer les $\binom{n}{k}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

- On complète que la partie inférieure du tableau ($k \leq n$)
- On met des « 1 » sur la 1ère colonne et sur la diagonale.
- Chaque nombre du triangle s'obtient en additionnant deux nombres de la ligne précédente : Celui du dessus avec celui de la colonne précédente.

Exemple 2 : On peut lire par exemple que : $\binom{2}{0} =$; $\binom{4}{1} =$; $\binom{4}{3} =$; $\binom{5}{2} =$

Propriété 1 : Soit n un entier naturel et k un entier naturel tel que $k \leq n - 1$

- On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- On a $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- **Formule de Pascal** : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

2 – Application à la loi binomiale

Propriété 2 : Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors pour tout k compris entre 0 et n on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p$$

Remarque : On pourra retenir le principe suivant : $P(X = k) = \overbrace{\binom{n}{k}}^{Nombre\ de\ chemins} \times p^{Nombre\ de\ succès} \times q^{Nombre\ d'Echec}$

Exemple 3 : On lance 5 fois un dé bien équilibré. Quel est la probabilité d'avoir exactement deux « 6 » ?