

## Fiche P1.5 : Loi géométrique

Dans cette fiche nous allons présenter la loi géométrique appelée aussi loi du premier succès.

**Définition 1** : On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  que l'on répète de façon indépendante. On dit qu'une variable  $X$  suit une **loi géométrique** de paramètre  $p$  et on note  $X \sim \mathcal{G}(p)$  si  $X$  compte le nombre de fois qu'il faut répéter cette épreuve pour obtenir un premier succès.

**Remarque** : La variable  $X$  peut alors prendre toutes les valeurs entières  $k \geq 1$

**Exemple 1** : Un joueur de fléchette touche le centre de la cible avec une probabilité de 10%. Le joueur lance plusieurs fléchettes, jusqu'à qu'il parvienne à toucher le centre de la cible. On suppose que chaque lancer est indépendant des précédents. Soit  $X$  le nombre de lancers nécessaire pour le joueur alors  $X \sim \mathcal{G}(0.1)$ .

- $P(X = 1) =$
- $P(X = 2) =$
- $P(X = 3) =$

**Propriété 1** : Si  $X \sim \mathcal{G}(p)$  alors pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $P(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$ .

**Exemple 2** : La probabilité que le joueur y parvienne au 10<sup>ème</sup> lancer :

Il est possible d'obtenir les probabilités lié à une loi géométrique grâce à la calculatrice :

**Casio** : `Menu` / `STAT` puis `DIST` (F5) / `Geo` (F6/F2) | **Ti** : `Distr` ( `2nd` / `Vars` ). On descend avec la flèche :

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour calculer <math>P(X = k)</math> : <code>Gpd</code> (F1)</li> <li>• Pour calculer <math>P(X \leq k)</math> : <code>Gcd</code> (F2)</li> <li>• On complète de la façon suivante :                     <ul style="list-style-type: none"> <li>. <code>Data</code> : <code>Var</code> (F2)</li> <li>. <math>x</math> : Nombre de répétitions avant le 1<sup>er</sup> succès (<math>k</math>)</li> <li>. <math>p</math> : Probabilité du succès (<math>p</math>)</li> </ul> </li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pour calculer <math>P(X = k)</math> : <code>GeomtFdp</code> (F)</li> <li>• Pour calculer <math>P(X \leq k)</math> : <code>GeomtFRép</code> (G)</li> <li>• On utilise la syntaxe suivante <code>GeomtFdp(p, k)</code> ou <code>GeomtFRép(p, k)</code> avec :                     <ul style="list-style-type: none"> <li>. <math>k</math> : Nombre de répétition avant le 1<sup>er</sup> succès.</li> <li>. <math>p</math> : Probabilité du succès</li> </ul> </li> </ul> |
|---|--|

**Propriété 2** : Si  $X \sim \mathcal{G}(p)$  alors  $E(X) = \frac{1}{p}$  et  $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

**Exemple 3** : Pour  $X \sim \mathcal{G}(0.1)$  on a  $E(X) =$  \_\_\_\_\_ et  $Var(X) =$  \_\_\_\_\_ et  $\sigma(X) =$  \_\_\_\_\_

En moyenne, \_\_\_\_\_

**Propriété 3** (Loi sans mémoire) : Si  $X \sim \mathcal{G}(p)$  alors pour tout entier  $k$  et  $l$  non nuls,

$$P_{X>k}(X > k + l) = P(X > l)$$

**Exemple 4** : Le joueur de fléchette a raté ses 10 premiers coups. Quelle est la probabilité que le joueur ne réussisse pas dans les 15 premiers coups ?

