

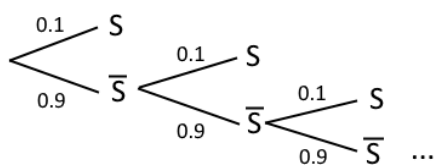
Fiche P1.5 : Loi géométrique

Dans cette fiche nous allons présenter la loi géométrique appelée aussi loi du premier succès.

Définition 1 : On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p que l'on répète de façon indépendante. On dit qu'une variable X suit une **loi géométrique** de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si X compte le nombre de fois qu'il faut répéter cette épreuve pour obtenir un premier succès.

Remarque : La variable X peut alors prendre toutes les valeurs entières $k \geq 1$

Exemple 1 : Un joueur de fléchette touche le centre de la cible avec une probabilité de 10%. Le joueur lance plusieurs fléchettes, jusqu'à qu'il parvienne à toucher le centre de la cible. On suppose que chaque lancer est indépendant des précédents. Soit X le nombre de lancers nécessaire pour le joueur alors $X \sim \mathcal{G}(0.1)$.



- $P(X = 1) = 0.1$
- $P(X = 2) = 0.9 \times 0.1 = 0.09$
- $P(X = 3) = 0.9^2 \times 0.1 = 0.081$

Propriété 1 : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors pour tout entier $k \geq 1$, $P(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1}$.

Exemple 2 : La probabilité que le joueur y parvienne au 10^{ème} lancer : $P(X = 10) = 0.1 \times 0.9^9 \approx 0.0387$

Il est possible d'obtenir les probabilités lié à une loi géométrique grâce à la calculatrice :

Casio : `Menu` / `STAT` puis `DIST` (F5) / `Geo` (F6/F2) | **TI** : `Distr` (`2nd` / `Vars`). On descend avec la flèche :

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Pour calculer $P(X = k)$: <code>Gpd</code> (F1) • Pour calculer $P(X \leq k)$: <code>Gcd</code> (F2) • On complète de la façon suivante : <ul style="list-style-type: none"> . <code>Data</code> : <code>Var</code> (F2) . x : Nombre de répétitions avant le 1^{er} succès (k) . p : Probabilité du succès (p) | <ul style="list-style-type: none"> • Pour calculer $P(X = k)$: <code>GeomtFdp</code> (F) • Pour calculer $P(X \leq k)$: <code>GeomtFRép</code> (G) • On utilise la syntaxe suivante <code>GeomtFdp(p, k)</code> ou <code>GeomtFRép(p, k)</code> avec : <ul style="list-style-type: none"> . k : Nombre de répétition avant le 1^{er} succès. . p : Probabilité du succès |
|---|--|

Propriété 2 : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Exemple 3 : Pour $X \sim \mathcal{G}(0.1)$ on a $E(X) = \frac{1}{0.1} = 10$ et $Var(X) = \frac{1-0.1}{0.1^2} = \frac{0.9}{0.01} = 90$ et $\sigma(X) = \sqrt{90} \approx 9.5$

En moyenne, le joueur parviendra à toucher le centre de la cible au bout du 10^{ème} lancer.

Propriété 3 (Loi sans mémoire) : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors pour tout entier k et l non nuls,

$$P_{X>k}(X > k + l) = P(X > l)$$

Exemple 4 : Le joueur de fléchette a raté ses 10 premiers coups. Quelle est la probabilité que le joueur ne réussisse pas dans les 15 premiers coups ?

$$P_{X>10}(X > 15) = P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.40951 = 0.59049 \text{ (valeur obtenue à la calculatrice)}$$

