

Fiche P2.1 : Expérience aléatoire à plusieurs épreuves indépendantes

1 – Expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

Définition 1 : On considère une expérience aléatoire qui se déroule en plusieurs étapes successives :

- On appelle « **épreuve** » une des étapes intermédiaires de l'expérience qui produit un résultat.
- Une **issue** de cette expérience est alors donnée par la liste des résultats obtenus à chacune des épreuves.
- On dit que deux épreuves sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'a pas influence sur la probabilité des résultats de l'autre.

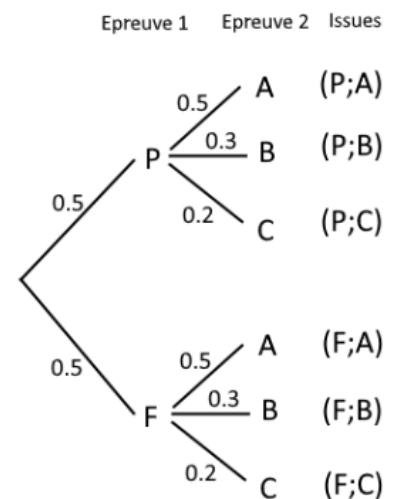
Remarques :

- On peut représenter une expérience aléatoire à plusieurs épreuves à l'aide d'un **arbre de probabilité**.
- L'arbre est dit **pondéré** si sur chacune des branches figure la probabilité de l'issue correspondante.
- Lorsque l'on répète une même épreuve dans les mêmes conditions initiales alors les épreuves obtenues sont indépendantes les unes des autres.

Exemple 1 : On considère l'expérience aléatoire constitué des deux épreuves suivantes :

- Epreuve 1 : On lance une pièce de monnaie bien équilibré. Univers : $\Omega_1 = \{P; F\}$
- Epreuve 2 : On tire un jeton dans une urne qui contient des lettres A, B et C . Univers : $\Omega_2 = \{A; B; C\}$

- 1) Donner une issue possible : $(P; B)$.
- 2) Justifier que les deux épreuves sont indépendantes
Le résultat de la pièce n'a pas d'influence sur la probabilité de piocher tel ou tel jeton.
- 3) Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilité.
- 4) Si l'urne contient le même nombre de chacune des lettres, quelle est la probabilité de chaque issue ? *Elle est de 1/6.*
- 5) Dans l'urne il y a : 5 jetons « A » ; 3 jetons « B » et 2 jetons « C ». Compléter l'arbre précédent pour qu'il soit pondéré.



Propriété 1 : Dans un arbre pondéré représentant des épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est égal au **produit** des probabilités du chemin qui mène à cette issue

Exemple 1 : (Suite)

- 6) Calculer la probabilité de l'issue $(P; B)$

$$P(P; B) = \frac{1}{2} \times 0.3 = 0.5 \times 0.3 = 0.15$$

- 7) Calculer la probabilité d'obtenir une Voyelle.

Rappel : La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le compose.

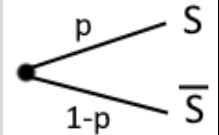
$$P(\text{Obtenir une Voyelle}) = P(P; A) + P(F; A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



2 – Schéma de Bernoulli

Définition 1 : Une **épreuve de Bernoulli de paramètre p** est une expérience avec 2 issues :

- **Succès** : noté « S » et de probabilité p .
- **Échec** : noté « \bar{S} » et de probabilité $q = 1 - p$.

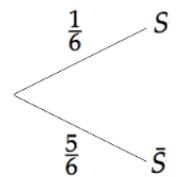


Exemple 2 : On lance un dé bien équilibré et on considère comme « succès » le fait d'obtenir un « 6 ».

Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

On a pour succès $S =$ « Obtenir un 6 » et pour échec $\bar{S} =$ « Ne pas obtenir un 6 ».

La probabilité du succès est $P(S) = \frac{1}{6}$. La probabilité de l'échec est $P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.



Définition 2 : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition plusieurs fois et de manière indépendante de la même épreuve de Bernoulli.

Remarque : On peut représenter un schéma de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré :

- Chaque nœud de l'arbre sera identique et correspond à l'épreuve de Bernoulli que l'on répète.
- Le nombre de répétition correspond au nombre d'étages de l'arbre.

Exemple 3 : On lance 3 fois de suite un dé bien équilibré. On s'intéresse au nombre de « 6 » obtenus.

1) Justifier que cette expérience est un schéma de Bernoulli.

On répète 3 fois la même épreuve de Bernoulli avec comme succès S : « Obtenir un 6 » de paramètre $p = \frac{1}{6}$

Chaque lancer est indépendant des autres.

2) Représenter le schéma à l'aide d'un arbre pondéré

3) a. Quelle est la probabilité d'avoir 3 succès ?

$$\begin{aligned} P(3 \text{ Succès}) &= P(SSS) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0.004 \approx 0,4\% \end{aligned}$$

b. Quelle est la probabilité d'avoir exactement 1 succès ?

$$\begin{aligned} P(1 \text{ Succès}) &= P(SS\bar{S}) + P(S\bar{S}S) + P(\bar{S}SS) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{75}{216} \approx 0.347 \approx 34.7\% \end{aligned}$$

c. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 succès ?

$$\begin{aligned} P(\text{au moins 1 Succès}) &= 1 - P(0 \text{ Succès}) \\ &= 1 - \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ &= 1 - \frac{125}{216} \\ &= \frac{91}{216} \approx 0.421 \approx 42.1\% \end{aligned}$$

