Fiche P2.1 : Variables aléatoires à densité

1 – Définition d'une loi à densité

● Nous avons vu les **variables aléatoires discrètes** dont les valeurs possibles sont des **nombres entiers**.

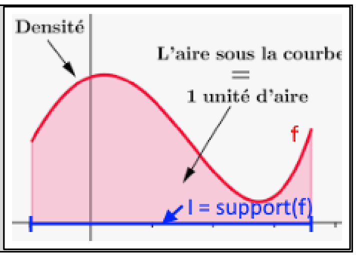
● Nous allons étudier ici des **variables aléatoires continues**, dont l'ensemble des valeurs possibles est donnée par un **intervalle**. On dit que ces variables suivent une **loi à densité** lorsque l'on utilise une fonction, appelée **densité de probabilité**, pour calculer les probabilités des évènements liées à cette variable aléatoire.

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

On dit que f est une **densité de probabilité** de **support** I si :

● La fonction f est **continue** et **positive** sur I et **nulle** en dehors de I

● L'aire sous la courbe de f est égale 1 : $\int_I f(t)\,dt = 1$



Exemple 1 : Voici quelques exemples de densité de probabilité.

● La fonction f constante égale à 1 sur l'intervalle $[0; 1]$ et nulle ailleurs.

● La fonction $g(x) = 2x$ sur l'intervalle $[0; 1]$ et nulle ailleurs.

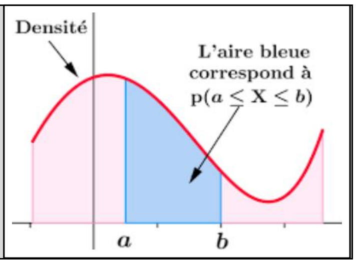
● La fonction $h(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et nulle ailleurs.

Définition 2 : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I.

Soit f une densité de probabilité de support I. On dit que X a pour densité f si,

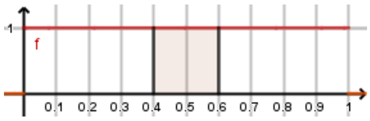
pour tout réel a et b tel que $[a; b]$ est inclus dans I on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$$



Exemple 2 : Si X a pour densité la fonction f de l'exemple 1 :

$P(0.4 \leq X \leq 0.6) = \int_{0.4}^{0.6} 1\,dt = [t]_{0.4}^{0.6} = 0.6 - 0.4 = 0.2$



Remarque : Si X est une variable à densité, alors pour tout nombre réel k, $P(X = k) = \int_k^k f(t)\,dt = 0$.

Ainsi, la nature du signe d'inégalité « $\leq$ » ou « $<$ » n'a pas d'importance : $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$.

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire de densité f. On a appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F. On a alors :

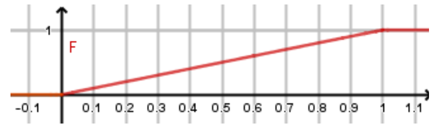
● F est une primitive de f : F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $F'(x) = f(x)$.

● Pour tout réel a et b, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

● Si $I = support(f)$, alors $F(x) = 0$ si $x \leq \min(I)$ et $F(x) = 1$ si $x \geq \max(I)$.

Exemple 3 : La fonction de répartition de la variable X de l'exemple 2 est :

$F(x) = 0$ sur $]-\infty; 0]$; $F(x) = x$ sur $[0; 1]$; $F(x) = 1$ sur $[1; \infty[$



2 – Paramètres d'une loi à densité

Rappel : Pour une variable aléatoire discrète X les paramètres sont donnés par les formules suivantes :

● L'**espérance** : $E(X) = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

● La **variance** : $V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$

Pour les variables continues à densité, on remplace dans les formules la somme $\sum$ par une intégrale $\int$:

Propriété 2 : Soit X une variable aléatoire de densité f et $I = support(f)$. L'**espérance** de X est le nombre

$$E(X) = \int_I t\, f(t)\, dt$$

Remarque : L'espérance de X s'interprète toujours comme la valeur **moyenne** (théorique) des valeurs prises par la variable X, sur un nombre infini d'observations.

Exemple 4 : Si X a pour densité la fonction f constante égale à 1 de support $I = [0; 1]$

$E(X) = \int_0^1 t.f(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 0.5 \times 1^2 - 0.5 \times 0^2 = \frac{1}{2}$

Propriété 3 : Soit X une variable aléatoire de densité f et $I = support(f)$. La **variance** de X est le nombre

$$V(X) = \int_I [t - E(X)]^2 f(t)\, dt$$

Remarque : La variance de X est un paramètre qui mesure comment les valeurs de la variables oscillent autour de la moyenne théorique. Plus la variance est grande, plus les écarts avec la moyenne seront important. En pratique, pour des raisons mathématiques et pour garder une cohérence dans les unités, on utilise plutôt **l'écart-type** qui est définie à partir de la variance par la formule :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Exemple 5 : Si X a pour densité la fonction f constante égale à 1 de support $I = [0; 1]$

$V(X) = \int_0^1 (t - 0.5)^2.f(t)\, dt = \int_0^1 (t^2 - t + 0.5)\,.dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.288$$