Fiche P2.2 : Loi Uniforme sur $[a\,;b]$

1 – Densité et Fonction de Répartition

Définition 1 : On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $I = [a, b]$, et on note $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, si X admet pour densité la fonction constante $f(t) = \frac{1}{b-a}$ sur I et nulle ailleurs.

Remarque : La loi uniforme permet de modéliser une situation équiprobabilité dans le cas continu : Les valeurs de X sont répartis de manière uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.

Exemple 1 : Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(0,10)$ alors sa densité est $f(t) = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10}$.

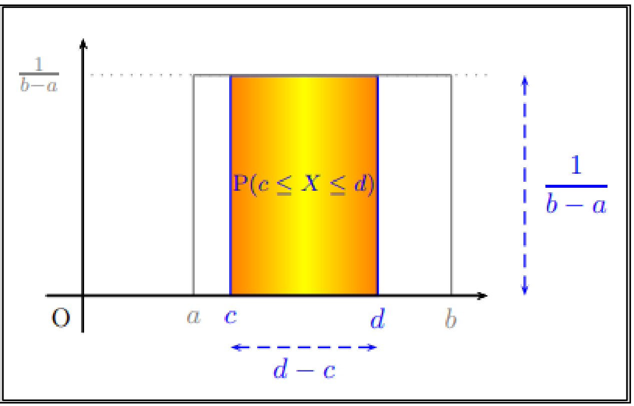
Propriété 1 : Si X suit la loi uniforme sur $I = [a, b]$, alors :

- La fonction de répartition de X est la fonction :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x \geq b \end{cases}$$

- Pour tous nombres réels c et d de I tels que $c \leq d$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$



Démonstration : Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors $F(x) = \frac{x}{b-a} = \frac{1}{b-a}x$ est une primitive de la densité f. On a donc :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dt = [F(x)]_c^d = \frac{1}{b-a}d - \frac{1}{b-a}c = \frac{d-c}{b-a}$$

Exemple 1 (Suite) : Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(0,10)$ alors $P(2 \leq X \leq 8) = \frac{8-2}{10-0} = \frac{6}{10}$

Exemple 2 : À l'arrêt de bus de la gare, un bus passe toutes les 20 minutes. Un voyageur ignore les horaires et arrive à cet arrêt de bus. On note T la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en minutes. On suppose que T suit la loi uniforme $T \sim \mathcal{U}(0; 20)$. Quelle est la probabilité d'attendre le bus exactement 5 minutes ? entre 5 et 10 minutes ? plus de 10 minutes ?

La densité de la variable T est la fonction $f(t) = \frac{1}{20-0} = \frac{1}{20}$.

$P(T = 5) = \int_5^5 f(t)dt = 0$; $P(5 \leq T \leq 10) = \frac{10-5}{20-0} = \frac{5}{20} = 0.25$ et $P(T \geq 10) = \int_{10}^{20} f(t)dt = \frac{20-10}{20-0} = \frac{1}{2}$

2 – Paramètres de la loi Uniforme

Propriété 2 : Si $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exemple 3 : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable T de l'exemple précédent.

- $E(T) = \frac{0+20}{2} = 10$. Le temps moyen d'attente sera de $10\ min$.
- $V(T) = \frac{(20-0)^2}{12} = \frac{400}{12} = 33{,}33 \ldots$ et $\sigma(T) = \sqrt{33.33 \ldots} \approx 5.77$