Fiche P2.2 : Variables aléatoires

1 – La notion de variable aléatoire

Définition 1 : Une **variable aléatoire** X permet d'associer à chaque issue d'une expérience aléatoire, un nombre réel.

Remarque : On peut voir une variable aléatoire comme un nombre qui dépend du hasard : En fonction du résultat de l'expérience, la variable X prendra des valeurs différentes. Les variables aléatoires permettent par exemple de modéliser un **gain** (qui peut être positif ou négatif) dans un jeu de hasard.

Notation : Les conditions « $X = a$ », « $X < a$ », « $X > a$ », « $X \leq a$ » et « $X \geq a$ » permettent de définir des évènements, auxquels correspond un ensemble d'issues et dont on peut calculer la probabilité.

Exemple 1 : On considère le jeu suivant : On lance une pièce. Si la pièce tombe sur « $Pile$ » alors on gagne 1 €, si la pièce tombe sur « $Face$ » on perd 1 €. Soit X le gain du joueur.

● X est une variable aléatoire car sa valeur dépend du résultat de l'expérience :

● Si c'est « Pile » alors on aura $X = 1$ et si c'est « Face » alors on aura $X = -1$

● $P(X = 1) = P("Pile") = 1/2$ ● $P(X = -1) = P("Face") = 1/2$

Exemple 2 : On considère le jeu suivant : On lance un dé. Si le dé tombe sur « 1 » alors on gagne 1 $, si le dé tombe sur « 6 » on gagne 6 $, sinon on perd 2 $. Soit X le gain du joueur.

● X est une variable aléatoire car sa valeur dépend du résultat obtenu avec le dé : 1; 2; 3; 4; 5 ou 6

● Les valeurs possibles pour X sont : 1, 6 et -2.

● $P(X > 0) = P(1; 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ● $P(X = -2) = P(2; 3; 4; 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2 : Donner la **loi de probabilité** d'une variable X, c'est dire avec quelle probabilité la variable prend chacune des valeurs possibles.

Remarque : On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau :

Valeurs	x_1	x_2	…	x_n
Probabilités	p_1	p_2	…	p_n

On a alors $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

Exemple 1 : (Suite) Si la pièce est bien équilibré la loi de X est donnée par l'égalité :

$$P(X = 1) = P(X = -1) = 0.5$$

Exemple 2 : (Suite) Si le dé est bien équilibré la loi de X est donnée par le tableau suivant :

Valeurs	-2	1	6	**Total**
Probabilités	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

3 – **Espérance d'une variable aléatoire**

Définition 4 : On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre, noté $E(X)$, donné par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Remarque : L'espérance $E(X)$ peut s'interpréter comme la **valeur moyenne** prise par la variable X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple 1 (Suite) : Calculer l'espérence de la variable X et interpréter le résultat.

On a $E(X) = (-1) \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$.

Cela signifie qu'en moyenne le joueur ne gagnera ni ne perdra d'argent. On dit que le jeu est **équitable**.

Exemple 2 (Suite) : Calculer l'espérence de la variable X et interpréter le résultat.

On a $E(X) = (-2) \times \frac{4}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \approx -0{,}16$.

Cela signifie, qu'en moyenne le joueur perdra $0{,}16$€ par partie.

Remarque : Dans la majorité des jeux de hasard (la roulette, le loto, les tickets à gratter, etc) l'espérance du joueur est négatif : Ce que l'on perd en moyenne correspond à ce que gagne l'organisateur du jeu.