Fiche P2.3 : Loi Exponentielle

1 – Densité et Fonction de Répartition

Définition 1 : Soit $\lambda > 0$ un nombre réel. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ sur } [0; +\infty[\text{ et } f(t) = 0 \text{ sur }]-\infty; 0]$$

Exemple 1 : Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ alors X admet pour densité la fonction $f(t) = e^{-t}$

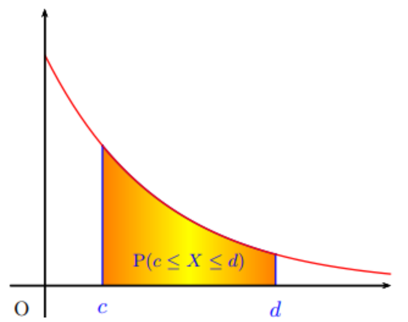
Propriété 1 : Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$:

- La fonction de répartition de X est la fonction :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Pour tous nombres réels c et d de I tels que $c \leq d$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$



Exemple 2 : La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}00005$. Déterminer la probabilité que ce composant tombe en panne avant $10\ 000\ h$, après $15\ 000\ h$, puis entre $10\ 000\ h$ et $15\ 000\ h$ de fonctionnement

- $P(T \leq 10\ 000) = 1 - e^{-0.00005 \times 10\ 000} = 1 - e^{-0.5} \approx 0.4$
- $P(T \geq 15\ 000) = 1 - P(T \leq 15\ 000) = 1 - \left(1 - e^{-0.00005 \times 15\ 000}\right) = e^{-0.75} \approx 0.47$
- $P(10\ 000 \leq T \leq 15\ 000) = e^{-0.00005 \times 10\ 000} - e^{-0.00005 \times 15\ 000} = 0.53 - 0.4 = 0.13$

2 – Propriétés et paramètres de la loi exponentielle

Propriété 2 : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors pour tous réels positif s et t, on a $P_{X>t}(X > t + s) = P(X > s)$

Remarque : Cette propriété énonce le fait que la loi exponentielle est une « loi sans mémoire », comme la loi géométrique. Ainsi la loi exponentielle est souvent utilisé pour modéliser la durée de vie d'un phénomène sans sans vieillissement, ou sans usure : En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant un temps t ne change rien à son espérance de vie à partir de ce temps-là.

Exemple 3 : L'ampoule a déjà fonctionné $5000\ h$, quelle est la probabilité qu'elle « vive » plus de $20\ 000\ h$?

$$P_{T>5000}(T > 20\ 000) = P_{T>5000}\big(T > 5\ 000 + 15\ 000\big) = P(T > 15\ 000) = e^{-0.75} \approx 0.47$$

Propriété 3 : Si Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Exemple 4 : Déterminer la durée de vie moyenne du composant électronique de l'exemple précédent.

$E(T) = \frac{1}{0.00005} = 20\ 000$. La durée de vie moyenne du composant sera de $20\ 000\ h$.