Fiche ___ : Loi de Bernoulli & Simulation

1 – Loi de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p

Définition 1 : ____

____

- Notation : On note alors ________________________
- Loi de probabilité : La loi de Bernoulli de paramètre p est donc donnée par le tableau suivant :

Valeurs			Total
Probabilités			

- $P(X = 1) =$
- $P(X = 0) =$

- Espérance : $E(X) =$

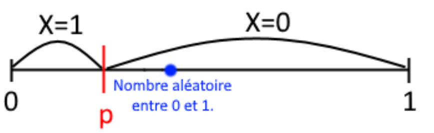
Exemple 1 : On lance un dé bien équilibré. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le dé tombe sur la face « 6 » et qui vaut 0 sinon.

- X suit la loi de bernouilli de paramètre $p =$
- $P(X = 1) =$ et $P(X = 0) =$
- $E(X) =$

2 – Simulation d'une variable de Bernoulli

- Il est possible de **simuler** informatiquement une variable de Bernoulli c'est-à-dire de créer avec l'ordinateur une variable aléatoire qui suivra la loi de Bernoulli.
- Pour cela on utilise un générateur de nombre aléatoire qui choisi aléatoirement et de manière **uniforme** un nombre entre 0 et 1 : Avec le tableur on utilise la fonction $ALEA()$ et avec Python la fonction $random()$.
- Pour créer une variable de Bernouilli X de paramètre p on utilise alors l'algorithme suivant :

« Si le nombre aléatoire est inférieur à p alors X vaut 1 sinon X vaut 0. »



$P(X = 1) = p$

$P(X = 0) = 1 - p$

. Avec le tableur, on peut entrer dans une cellule la formule suivante : $= SI(ALEA() < p; 1; 0)$

. Avec Python, on peut créer une fonction $bernoulli(p)$:

```
from random import random

def bernoulli(p):
    if random()<p:
        return 1
    else:
        return 0
```

Exemple 2 : Pour simuler le lancer d'un dé on peut utiliser les instructions précédentes avec $p = 1/6$

3 – Echantillon de n variables de Bernoulli

● Pour créer un échantillon de n variables de Bernouilli, il suffit de répéter n fois les instructions précédentes

. Avec le tableur, on utilise le **recopiage automatique** pour remplir n cellules avec la formule précédente.

. Avec Python on utilise une **boucle** et on peut remplir une liste avec les différents résultats obtenus :

```python
def echantillon(n,p):
    L=[]
    for i in range(n):
        L.append(bernoulli(p))
    return(L)
```

● On peut alors facilement compter le nombre de succès puis donner la **fréquence** de succès.

. Avec le tableur, on utilise la formule $= SOMME(plage\ de\ cellule\ de\ l'échantillon)/n$

. Avec Python, on utilise la fonction $sum()$ pour une liste : `frequence=sum(echantillon(n,p))/n`

Exemple 3 : Pour simuler 100 lancers d'un dé, on peut utiliser ces instructions avec $n = 100$ et $p = 1/6$. On obtient alors la fréquence de « 6 » sur les 100 lancers.

4 – Etude des échantillons

● Nous allons maintenant simuler N échantillons de taille n et observer les fréquences obtenues.

. Avec le tableur, on utilise le recopiage automatique pour obtenir les N échantillons ainsi que la fréquence de succès dans chacun d'entre eux.

. Avec Python, on crée une nouvelle liste de taille N qui va simuler les N échantillons et stocker au fur et à mesure les différentes fréquences obtenues : `F=[sum(echantillon(n,p))/n for k in range(N)]`

● On observe le phénomène de **fluctuation d'échantillonnage** : La fréquence de succès varie autour de la probabilité théorique p. Plus la taille n des échantillons est grande, moins les fluctuations sont importantes.

Exemple 4 : Fréquences obtenues avec l'instruction précédente pour $N = 1000$ et $p = 1/6$

● Avec $n = 20$

```
[0.15, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.2, 0.15,
 0.1, 0.3, 0.3, 0.1, 0.25, 0.2, 0.3, 0.15, 0.1,
 0.25, 0.1, 0.05, 0.15, 0.2, 0.15, 0.1, 0.15, 0
.15, 0.05, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.25, 0.2, 0.25,
```

● Avec $n = 100$

```
[0.16, 0.11, 0.22, 0.16, 0.14, 0.19, 0.21, 0.23,
 0.18, 0.19, 0.17, 0.15, 0.22, 0.17, 0.21, 0.15,
 0.09, 0.16, 0.11, 0.22, 0.15, 0.19, 0.19, 0.14,
 0.19, 0.15, 0.08, 0.15, 0.18, 0.16, 0.16, 0.23,
```

● Avec $n = 500$

```
[0.162, 0.202, 0.164, 0.174, 0.158, 0.152, 0.164
, 0.148, 0.206, 0.148, 0.19, 0.18, 0.184, 0.194,
 0.15, 0.168, 0.188, 0.174, 0.17, 0.156, 0.166,
 0.172, 0.166, 0.164, 0.168, 0.19, 0.162, 0.232,
```

● On peut quantifier ces fluctuations en fonction de la taille n des échantillons avec la propriété suivante :

Propriété 1 : Soit p la probabilité théorique, n la taille des échantillons et $s = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ alors :

● En moyenne, environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle $[p - s; p + s]$

● En moyenne, environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$

● En moyenne, environ 99% des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 3s; p + 3s]$

Remarque : Le nombre s coïncide environ à **l'écart-type** observé dans la série des fréquences obtenues.

Exemple 5 : Avec $p = \frac{1}{6} \approx 0.17$, pour $n = 100$ on a $s =$

● Environ 68% des fréquences sont dans l'intervalle ______________

● Environ 95% des fréquences sont dans l'intervalle ______________

● Environ 99% des fréquences ont dans l'intervalle ______________