Fiche P3.2 : Ajustement affine

1 – Droite d'ajustement

● Lorsque les points sont presque alignés, on peut approcher le nuage à l'aide d'une **droite d'ajustement**. On dit alors que l'on réalise un **ajustement affine** : On recherche une droite qui approxime au mieux tous les points du nuage, en passant au plus près de ceux-ci. La droite obtenue est appelée la droite de **régression.**

● Un ajustement permet de faire des estimations : Une **interpolation** lorsque la valeur à estimer se situe dans l'intervalle des valeurs connues et une **extrapolation** lorsqu'elle se situe à l'extérieur de cet intervalle.

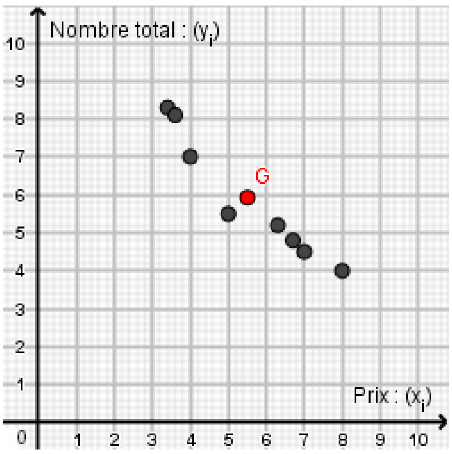
Exemple 1 : On reprend la série sur le prix d'un paquet (x_i) et le nombre total (y_i) cigarettes vendues.

1) Un ajustement affine est possible car ___________________________
2) Tracer « au jugé » un ajustement affine puis lire graphiquement l'équation de la droite de régression tracée : ____________________
3) Utiliser cet ajustement affine pour estimer graphiquement :
   a. Le prix d'un paquet pour 50 milliards de cigarettes vendues :

   ____

   b. Le nombre de cigarettes vendus avec un paquet à 10€ :

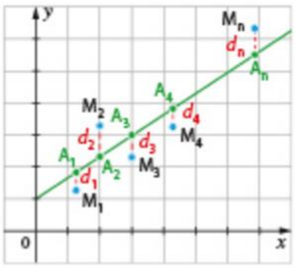
   ____



2 – Droite des moindres carrés

Définition 1 : On appelle **droite des moindres carrés** l'ajustement affine obtenue en minimisant la somme des carrés des distances entre les points du nuage et la droite.

Explication : Parmi toutes les droites qui peuvent réaliser un ajustement affine du nuage de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, il en existe une telle que la somme des carrés des écarts $E = d_1^2 + d_2^2 + \cdots d_n{}^2$ soit minimale où $d_i = A_iM_i$ et A_i est le point de la droite qui a la même abscisse que M_i. C'est en quelque sorte la droite qui passe « au plus près » de tous les points du nuage en même temps.



Propriété 1 : La **droite des moindres carrés** a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(x;y)}{\sigma(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

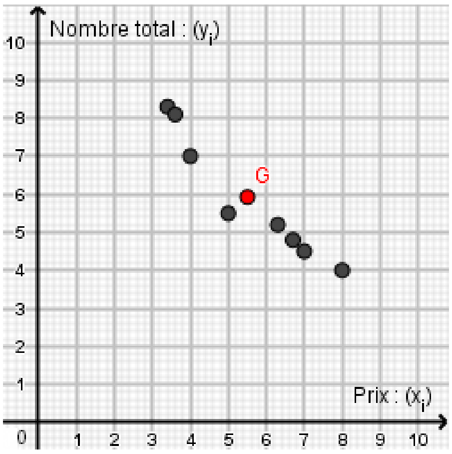
Remarque : Pour déterminer les coefficients a et b de l'équation, on utilise le tableur ou la calculatrice.

Tutoriel Casio : Dans le menu $STAT$: F3 (REG) puis F1 (X) puis F1 (ax+b) .

Tutoriel TI : Touche STAT, dans l'onglet $\boldsymbol{CALC}$ (touche ▶), sélectionner $\boldsymbol{RegLin(ax+b)}$ puis $Calculer$.

Propriété 2 : La **droite des moindres carrés** passe par le point moyen du nuage $G(\bar{x}; \bar{y})$

Exemple 2 : On reprend la série sur le prix d'un paquet (x_i) et le nombre total (y_i) cigarettes vendues.



1) Déterminer à la calculatrice une équation de la droite (d) des moindres carrés, puis tracer cette droite sur la figure ci-contre.

2) Vérifier que le point moyen $G(5.5; 5.925)$ appartient à (d)

3) Utiliser cet ajustement affine pour retrouver par le calcul les estimations précédentes :

a. Le prix d'un paquet pour 50 milliards de cigarettes vendues : ______

b. Le nombre de cigarettes vendus avec un paquet à 10€ : ______

4) Quel prix du paquet maximise la Recette totale réalisée par la vente de cigarettes ?

3 – Coefficient de corrélation linéaire

Définition 1 : On considère une série statistique à deux variables $x = (x_1; \dots; x_n)$ et $y = (y_1; \dots; y_n)$.

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de la série, le nombre r définie par $r = \frac{cov(x;y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$

Propriété 1 : Le coefficient de corrélation linéaire est compris entre -1 et 1 : $-1 \leq r \leq 1$

Remarque : Si r est proche de -1 ou 1, il y a une forte corrélation linéaire entre les deux variables et on pourra réaliser un ajustement affine. Si r est proche de 0, l'ajustement par une droite ne sera pas pertinent. Il se peut alors qu'un autre type de courbe puisse mieux ajuster le nuage (voir fiche suivante)

Calculatrice : Le coefficient de corrélation r s'obtient à la calculatrice en même temps que les coefficients.

Exemple 2 : A la calculatrice on trouve $r \approx -0.96$: L'ajustement affine est donc approprié.