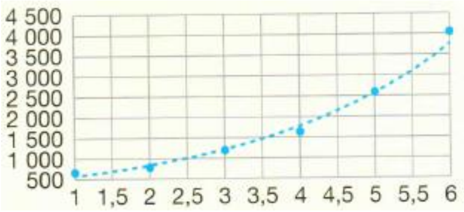
Fiche P3.3 : Ajustement non linéaire

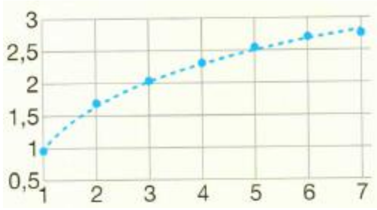
1 – Types d'ajustement

Dans certain cas, lorsque les points ne sont pas presque alignés, l'ajustement affine n'est pas le plus adapté.

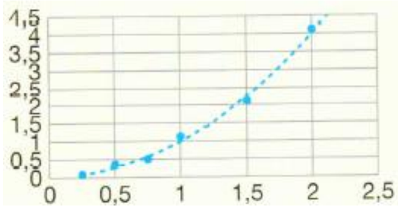
Voici les principaux autres **types d'ajustements** possibles pour un nuage de points :



Ajustement exponentiel



Ajustement logarithmique



Ajustement polynomial

2 – Changement de variables

Il est parfois possible de se ramener à un ajustement affine en utilisant un **changement de variable :**

● On applique une transformation sur l'une des deux variables afin d'obtenir une nouvelle série statistique sur laquelle on effectue un ajustement affine.

● Le changement de variable permet alors de revenir aux données initiales.

Exemple 1 : Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés dans une start-up en $I.A$ en fonction de l'année. On a représenté en *figure* 1 le nuage de points $M(x_i; y_i)$ de cette série statistique.

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428
$z_i = \sqrt{y_i} - 3$	5.12	7.2	8.4	11.39	14	15.57	17.69

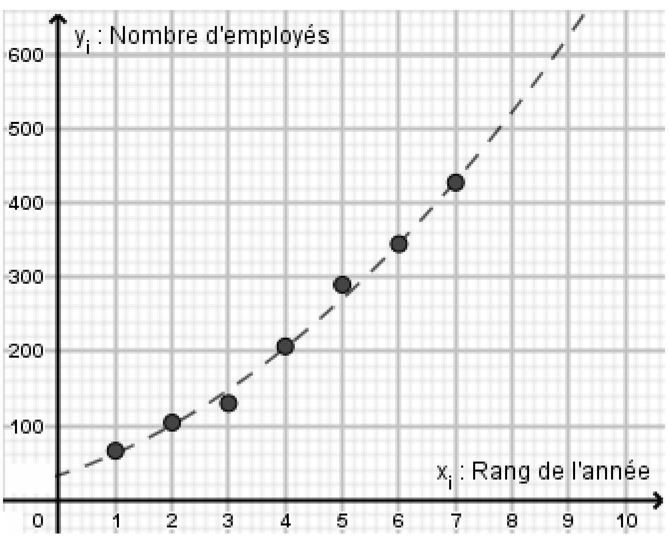


Figure 1 : Nuage de points $M_i(x_i; y_i)$
(Avant le changement de variable)

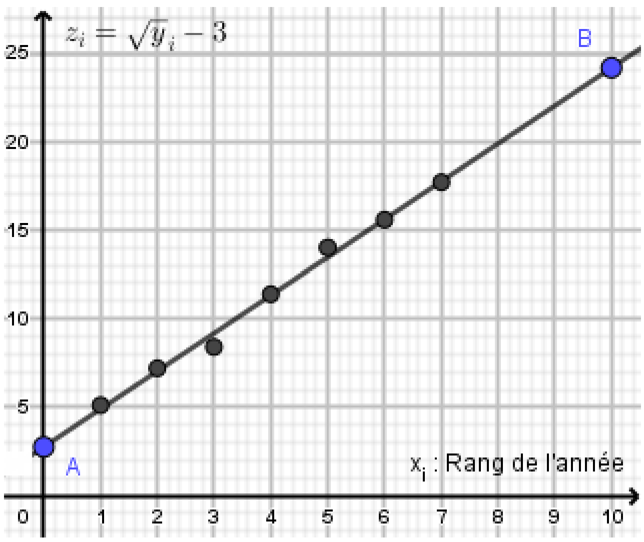


Figure 2 : Nuage de points $P_i(x_i; z_i)$
(Après le changement de variable)

1) Quel type d'ajustement semble-t-il le plus adapté pour le nuage de points $M(x_i; y_i)$?

A la calculatrice on trouve un coefficient de corrélation linéaire $r = 0.9886$

Un ajustement affine serait possible mais un ajustement polynomiale semble encore plus adapté.

2) On décide donc d'effectuer le changement de variable $z = \sqrt{y} - 3$.

Compléter la dernière ligne du tableau ci-dessus.

3) **a.** Représenter en *figure* 2 le nuage de points $P_i(x_i; z_i)$ de cette nouvelle série statistique.

b. Un ajustement affine de ce nouveau nuage de points semble-t-il plus pertinent ?

Oui, car les points des nuages sont davantage alignés que dans le premier graphique

4) **a.** A l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés du nuage de points $P_i(x_i; z_i)$ et donner le coefficient de corrélation

Après saisie de la série statistique $(x_i; z_i)$ dans la calculatrice on trouve : $a \approx 2.14$ et $b = 2.76$

La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation $\mathcal{D}: z = 2.14x + 2.76$

Le coefficient de corrélation est $r \approx 0.996$. L'ajustement affine est très pertinent.

b. Tracer cette droite en figure 2

On calcule les coordonnées de deux points A et B de la droite $\mathcal{D}$.

$x = 0 : z = 2.14 \times 0 + 2.76 = 2.76$ (Ordonnée à l'origine). On place $A(0; 2.76)$.

$x = 10 : z = 2.14 \times 10 + 2.76 = 24.16$. On place $B(10; 24.16)$.

x	0	10
z	2.76	24.16

5) **a.** En déduire la fonction $y = f(x)$ permet d'ajuster le nuage de points $M(x_i; y_i)$.

On utilise le changement de variable $z = \sqrt{y} - 30$. On obtient $\sqrt{y} = z + 3$ d'où $y = (z + 3)^2$

Or, $z = 2.14x + 2.16$ d'où $y = (2.14x + 2.76 + 3)^2 = (2.14x + 5.76)^2$

On obtient en développant $y = 4.5796x^2 + 24.6528x + 33.1776$.

b. Tracer la courbe de la fonction f dans la figure 1.

6) Réaliser les estimations suivantes :

a. Le nombre d'employés qu'il y'aura en 2021

2021 est l'année de rang 8 : Donc $x = 8$. On cherche le nombre d'employés y.

On applique la fonction f : $y = 4.5796 \times 8^2 + 24.6528 \times 8 + 33.1776 = 522.88$

On commence par utiliser la droite d'ajustement : $z = 2.14 \times 8 + 2.76 \approx 19.88$

On peut estimer le nombre d'employés à 523 en 2021.

b. A partir de quelle année le nombre d'employé dépassera 625 employés

On sait que $y = 625$. On cherche le rang de l'année x.

On résout $4.5796x^2 + 24.6528x + 33.1776 = 625$ soit $4.5796x^2 + 24.6528x - 591.8224 = 0$

A la calculatrice on trouve : $x_1 \approx -14.37$ et $x_2 \approx 8.99$.

Le nombre d'employés dépasse 625 à partir de l'année de rang 9 donc à partir de 2022.