Fiche ___ : Suites arithmétiques

1 – Définition

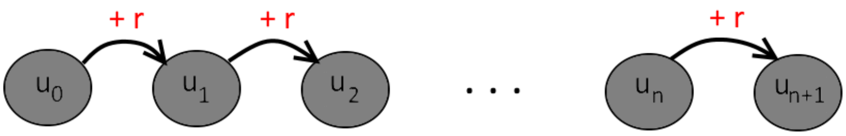
Définition 1 : On dit qu'une suite u est **arithmétique** si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé la **raison** de la suite.

Exemple 1 : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui, préciser la raison de la suite.

- La suite $u = (3; 6; 9; 12; 15; \dots)$:
- La suite $v = (5; 3; 1; -1; -3; \dots)$:
- La suite $w = (5; 10; 15; 20; 24; \dots)$:

2 – Relation de récurrence

Propriété 1 : Si u est une suite **arithmétique** de raison r alors pour tout rang n, on a $u(n+1) = u(n) + r$



Exemple 2 :

- Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

  $u = (\ ; \ ; \ ; \ ; \ ; \ ; \dots)$ et on a, pour tout rang n, la relation de récurrence ____________________.
- Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -3$.

  $v = (\ ; \ ; \ ; \ ; \ ; \ ; \dots)$ et on a, pour tout rang n, la relation de récurrence ____________________.

Remarque : Une suite u est arithmétique si, pour tout rang n, la différence entre deux termes consécutifs $u(n+1) - u(n)$ est un nombre **constant**, qui correspond alors à la raison de la suite.

3 – Formule explicite

Propriété 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 + nr$

Remarque : Plus généralement, si k est un entier naturel, pour tout rang $n \geq k$, on a $u_n = u_k + (n-k)r$

En particulier, lorsque le premier terme est u_1 on utilise la relation $u_n = u_1 + (n-1)r$

Remarque : La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Exemple 3 :

- Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

  $u_n =$ $u_{10} =$
- Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 7$ et de raison $r = -3$.

  $v_n =$ $v_{10} =$

4 – Représentation graphique et sens de variation

Propriété 3 : Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique est un nuage de points **alignés**.

Remarque : La différence d'ordonnée entre deux points successifs est donc constante et correspond alors à la raison de la suite. On parle d'évolution **linéaire.**

Propriété 4 : On considère une suite arithmétique u de raison r.

● Si $r > 0$ alors la suite u est **croissante**

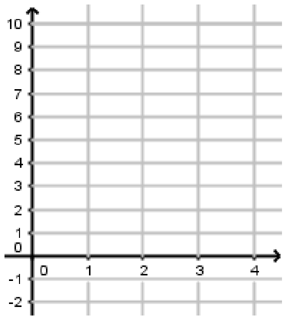
● Si $r < 0$ alors la suite u est **décroissante**

Remarque : Si $r = 0$ alors tous les termes de la suite sont égaux et on dit que la suite est **constante.**

Exemple 4 : Représenter graphiquement les suites ci-dessous et observer leur sens de variation.

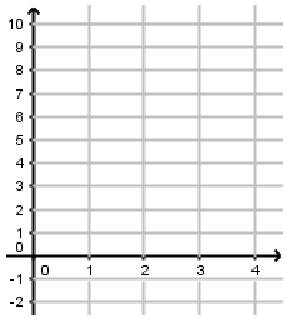
● Suite arithmétique u avec :

$$u_0 = 1 \,;\, r = 2$$



● Suite arithmétique v avec :

$$v_0 = 10 \,;\, r = -3$$



● Suite w définie par :

$$w(n) = n^2 + 1$$