Fiche F1.2 : Suites arithmétiques

1 – Définition

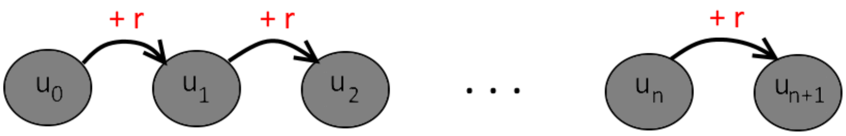
Définition 1 : On dit qu'une suite u est **arithmétique** si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé la **raison** de la suite.

Exemple 1 :

- La suite $u = (3; 6; 9; 12; 15; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $r = 3$
- La suite $v = (5; 3; 1; -1; -3; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $r = -2$
- La suite $w = (5; 10; 15; 20; 24; \dots)$ n'est pas arithmétique car on ajoute pas toujours le même nombre.

2 – Relation de récurrence

Propriété 1 : Si u est une suite **arithmétique** de raison r alors pour tout rang n, on a $u(n+1) = u(n) + r$



Exemple 2 :

- Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.
  $u = (1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$ et on a, pour tout rang n, la relation de récurrence $u(n+1) = u(n) + 2$.
- Soit v la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -3$.
  $v = (10; 7; 4; 1; -2; -5; \dots)$ et on a, pour tout rang n, la relation de récurrence $v(n+1) = v(n) - 3$.

Remarque : Une suite u est arithmétique si, pour tout rang n, la différence entre deux termes consécutifs $u(n+1) - u(n)$ est un nombre **constant**, qui correspond alors à la raison de la suite.

3 – Formule explicite

Propriété 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 + nr$

Remarque : Plus généralement, si k est un entier naturel, pour tout rang $n \geq k$, on a $u_n = u_k + (n-k)r$
En particulier, lorsque le premier terme est u_1 on utilise la relation $u_n = u_1 + (n-1)r$

Remarque : La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Exemple 3 :

- Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$.
  Pour tout rang n, on a $u_n = 1 + n \times 2 = 2n + 1$; $u_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$.
- Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 7$ et de raison $r = -3$.

Pour tout rang n on a $v_n = 7 + (n-1) \times (-3) = 7 - 3n + 3 = -3n + 10$; $v_{10} = -3 \times 10 + 10 = -20$.

4 – Représentation graphique et sens de variation

Propriété 3 : Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique est un nuage de points **alignés**.

Remarque : La différence d'ordonnée entre deux points successifs est donc constante et correspond alors à la raison de la suite. On parle d'évolution **linéaire.**

Propriété 4 : On considère une suite arithmétique u de raison r.

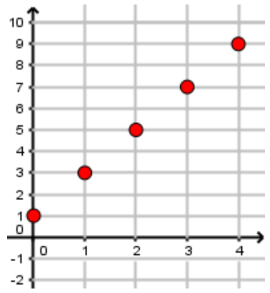
- Si $r > 0$ alors la suite u est **croissante**
- Si $r < 0$ alors la suite u est **décroissante**

Remarque : Si $r = 0$ alors tous les termes de la suite sont égaux et on dit que la suite est **constante.**

Exemple 5 : Représenter graphiquement les suites ci-dessous et observer leur sens de variation.

● Suite arithmétique u avec :

$$u_0 = 1 \,; r = 2$$

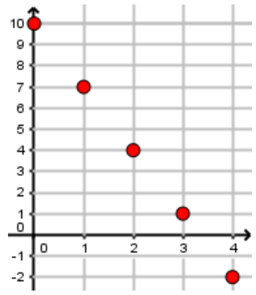


La raison est **positive**

u est **croissante**

● Suite arithmétique v avec :

$$v_0 = 10 \,; r = -3$$

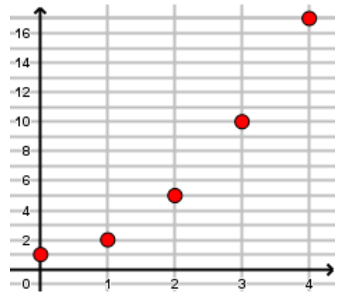


La raison est **négative**

v est **déroissante**

● Suite w définie par :

$$w(n) = n^2 + 1$$



Les points ne sont **pas alignés**

w n'est pas arithmétique