Fiche F1.3 : Suites géométriques

1 – Définition

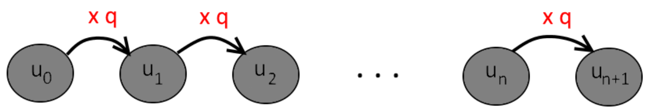
Définition 1 : On dit qu'une suite u est **géométrique** si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre q appelé la **raison** de la suite.

Exemple 1 :

- La suite $u = (1; 5; 25; 125; 625; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $q = 5$
- La suite $v = (100; 50; 25; 12.5; 6.25; \dots)$ est arithmétique. Sa raison est $q = \frac{1}{2} = 0.5$
- La suite $w = (2; 4; 8; 12; 24; \dots)$ n'est pas géométrique car on multiplie pas toujours par le même nombre.

2 – Relation de récurrence

Propriété 1 : Si u est une suite **géométrique** de raison q alors pour tout rang n, on a $u(n+1) = u(n) \times q$



Exemple 2 :

- Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

  $u = (1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots)$ et on a, pour tout rang n, la relation de récurrence $u(n+1) = u(n) \times 3$.

- Soit v la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

  $v = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots)$ et on a, pour tout rang n, la relation de récurrence $v(n+1) = v(n) \times 0.5$.

Remarque : Une suite u est géométrique si, pour tout rang n, le quotient entre deux termes consécutifs $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ est un nombre **constant**, qui correspond alors à la raison de la suite.

3 – Formule explicite

Propriété 2 : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout rang n, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarque : Plus généralement, si k est un entier naturel, pour tout rang $n \geq k$, on a $u_n = u_k \times q^{n-k}$.

En particulier, lorsque le premier terme est u_1, on utilisera la formule $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Remarque : La formule explicite permet de calculer n'importe quel terme sans calculer tous les précédents.

Exemple 3 :

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

Formule explicite : Pour tout rang n, $u_n = 1 \times 3^n = 3^n$ $\qquad u_{10} = 3^{10} = 59049$

- Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Formule explicite : Pour tout rang n, $v_n = 2 \times (0.5)^{n-1}$ $\qquad v_{10} = 2 \times 0.5^{10-1} = 2 \times 0.5^9 \cong 0.0039$

4 – Représentation graphique et sens de variation

Propriété 3 : Une suite géométrique est représentée par un nuage de points de forme **exponentielle**.

Remarque : On parle de **croissance exponentielle** lorsque la différence d'ordonnée entre les points devient de plus en plus importante et de **décroissance exponentielle** lorsque la la différence d'ordonnée entre les points devient de plus en plus faible.

Propriété 4 : On considère une suite géométrique u de raison $q > 0$ et de 1[er] terme positif.

● Si $q > 1$ alors la suite u est **croissante** ● Si $0 < q < 1$ alors la suite u est **décroissante.**

Remarques :

● Si $q = 1$ alors tous les termes de la suite sont égaux et on dit que la suite est **constante.**

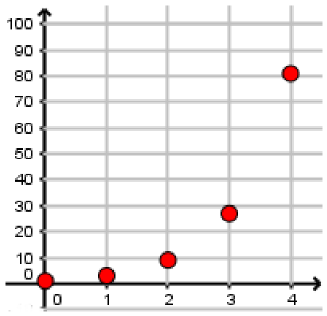
● Lorsque le premier terme $u(0)$ est négatif, le sens de variation est inversé par rapport à la propriété.

● Lorsque la raison est négative, la suite oscille entre terme positif et terme négatif.

Exemple 4 : Représenter graphiquement les suites ci-dessous et observer leur sens de variation.

● Suite géométrique u avec :

$u_0 = 1 \,;\, q = 3$

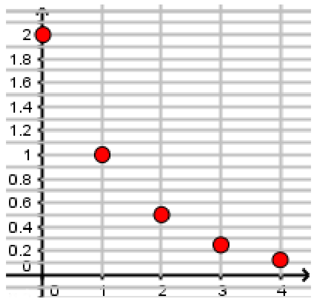


La raison est **supérieure à 1**

u est **croissante**

● Suite géométrique v avec :

$v_0 = 2 \,;\, q = \frac{1}{2}$

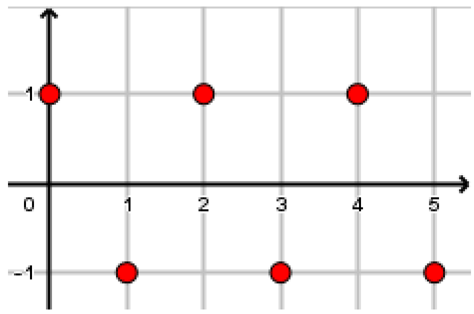


La raison est **inférieur à 1**

v est **déroissante**

● Suite géométrique w avec :

$w_0 = 1 \,;\, q = -1$



La raison est inférieure à 0

w n'a pas de sens de variation