Fiche F2.1 : Fonctions affines

1 – Définition

Définition 1 : On appelle **fonction affine** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Exemple 1 : $f(x) = 3x - 5$ est une fonction affine. Ses coefficients sont $a = 3$ et $b = -5$

Cas particuliers :

● Si $b = 0$, c'est-à-dire $f(x) = ax$, on dit que f est une fonction **linéaire**.

● Si $a = 0$, c'est-à-dire $f(x) = b$, on dit que f est une fonction **constante**.

2 – Représentation graphique

Propriété 1 : Dans un repère la courbe représentative d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite**.

On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Interprétation graphique :

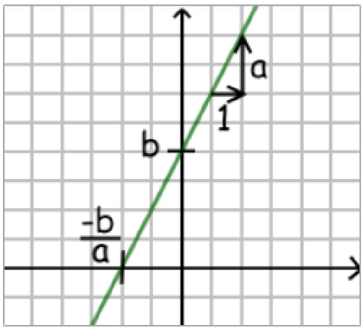
● a est appelée le coefficient directeur.

Il correspond à la pente de la droite qui représente f.

● b est appelée l'ordonnée à l'origine.

La droite coupe l'axe des ordonnées en b. C'est l'image de 0 par f.

● La droite coupe l'axe des abscisses en $-\frac{b}{a}$. C'est l'antécédent de 0 par f.



Exemple 2 : La droite du graphique précédent a pour équation $y = 2x + 4$

Exemple 3 : Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = -2x + 5$

f est une fonction affine donc elle est représentée par une droite.

Pour tracer cette on a besoin de deux points de celle-ci :

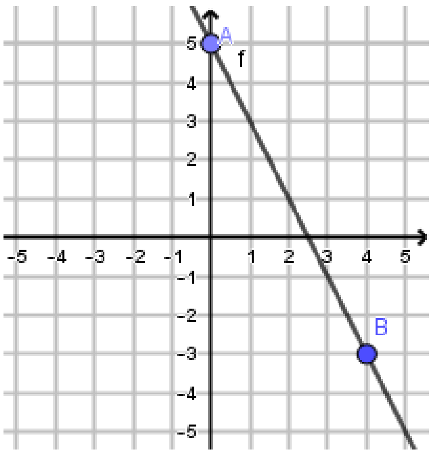
x	0	4
$f(x)$	5	-3

$f(0) = -2 \times 0 + 5 = 5$

$f(4) = -2 \times 4 + 5 = -3$

On place donc les points $A(0; 5)$ et $B(4; -3)$

La droite (AB) est la représentation graphique de la fonction f



Remarques :

● La droite représentative d'une fonction linéaire passe par l'origine du repère.

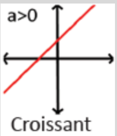
● La droite représentative d'une fonction constante est horizontale : Son équation est de la forme $y = k$

● Les fonctions affines sont des droites mais certaines droites ne sont pas des fonctions affines : Les droites verticales qui ne sont pas des fonctions : Leur équation est de la forme $x = k$.

3 – Sens de variation et signe d'une fonction affine

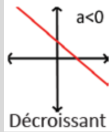
Propriété 2 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$

- f s'annule en $x_0 = -\frac{b}{a}$.
- Si $a > 0$ alors f est croissante et



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Si $a < 0$ alors f est décroissante et



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exemple 4 : Réaliser le tableau de signe des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x + 2$

$x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{4} = -0.5$ et $a = 4 > 0$

f est croissante donc d'abord « $-$ » puis « $+$ »

x	$-\infty$	-0.5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

2) $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

$x_0 = -\frac{b}{a} = \frac{-4}{-\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{1} = 12$ et $a = -\frac{1}{3} < 0$

g est décroissante donc d'abord « $+$ » puis « $-$ »

x	$-\infty$	12	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

4 – Linéarité

Propriété 3 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. Alors pour tout nombre réel u et v, on a :

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = a$$

Exemple 5 : On a $f(2) = 5$, $f(5) = 9$ et $f(10) = 15$. Cette fonction peut-elle être affine ?

- $\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{9-5}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1.33$
- $\frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{15-9}{10-5} = \frac{6}{5} = 1.2.$

Donc la propriété de linéarité n'est pas vérifiée et la fonction f ne peut donc pas être affine.

Exemple 6 : Déterminer la fonction affine f qui vérifie $f(1) = -2$ et $f(5) = 6$

- Comme f est une fonction affine elle s'écrit sous la forme : $f(x) = ax + b$
- On commence par calculer le coefficient directeur $a = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2.$
- Donc $f(x) = 2x + b$. Pour trouver b, on résout une équation en utilisant une des deux valeurs proposés :

$f(1) = -2$

$\Leftrightarrow 2 \times 1 + b = -2$

$\Leftrightarrow 2 + b = -2$

$\Leftrightarrow b = -2 - 2$

$\Leftrightarrow b = -4$

- Ainsi, on a $f(x) = 2x - 4$.