

Fiche F2.1 : Fonctions exponentielles

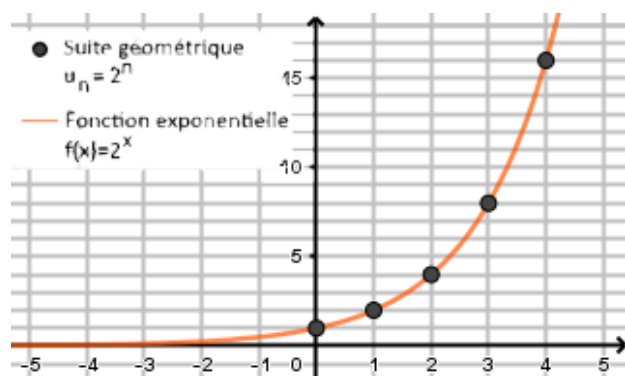
1 – Définition

Définition 1 : Soit a un nombre réel strictement positif. On appelle fonction **exponentielle de base a** la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a^x$ (la variable est en exposant)

Remarques :

- La fonction exponentielle de base a prolonge la suite géométrique $u_n = a^n$ en étendant son ensemble de définition à l'ensemble des nombres réels.
- L'image d'un nombre se calcule avec la calculatrice en utilisant la touche ^.
- Quelque soit la base a , on a toujours $f(0) = a^0 = 1$ et $f(1) = a^1 = a$

Exemple 1 : On a tracé ci-dessous la fonction $f(x) = 2^x$.



- $f(4) =$
- $f(3,5) =$
- $f(-1,5) =$
- $f(0) =$
- $f(1) =$

Propriété 1 : La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = k \times a^x$ prolonge la suite géométrique (u_n) de 1^{er} terme $u_0 = k$ et de raison $q = a$.

Exemple 2 : Sabrina place 500 € au taux annuel de 4,5%

1) On note u_n le capital au bout de n années de placement.

a. Quelle est la nature de la suite ?

b. Exprimer u_n en fonction de n ?

c. Quel est le capital : Au bout de 3 ans ? Au bout de 17 ans ?

2) On considère la fonction $f(x) = 500 \times 1.045^x$. Cette fonction prolonge la suite (u_n) précédente.

On peut l'utiliser pour calculer le capital au bout d'un temps précis entre deux années entières.

a. Quel est le capital au bout de 1 année et demi ? _____

b. Quel est le capital au bout de 7 trimestres ? _____

c. Quel est le capital au bout de 1000 jours ? _____



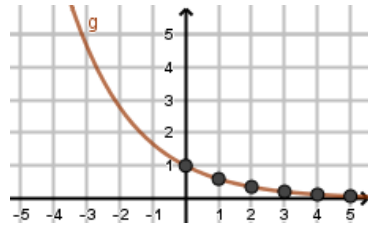
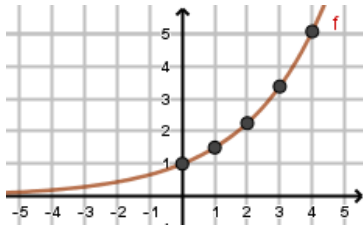
2 – Sens de variation et représentation graphique

Propriété 2 : Soit $a > 0$. La fonction exponentielle de base $f(x) = a^x$ est :

- Strictement **croissante** si $a > 1$
- Strictement **décroissante** si $0 < a < 1$

Exemple 3 :

- La fonction $f(x) = 1.5^x$ est _____
- La fonction $g(x) = 0.8^x$ est _____



Remarques :

- La fonction $f(x) = a^x$ a le même sens de variation que la suite géométrique qu'elle prolonge.
- Si $k > 0$, la fonction $f(x) = k \times a^x$ a le même sens de variation que la fonction exponentielle $f(x) = a^x$.

Exemple 4 : La fonction $f(x) = 500 \times 1.045^x$ de l'exemple 2 est _____.

3 – Règles de calcul

Les règles de calculs avec les puissances entières s'étendent au cas où l'exposant est un nombre réel.

Propriété 3 : Soient a et b deux réels strictement positifs, x, y deux nombres réels et n un entier. On a :

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^n = a^{nx}$
- $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

Remarque : Pour tout réel $a > 0$, a^{-1} est l'**inverse** de a : $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$

Exemple 5 : Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{8,75^7 \times 8,75^{-1.5}}{8,75^{0.5}} =$
- $\frac{(1,8^{-1.1})^4}{1,8^{-4,2}} =$
- $2^3 \times 5^3 =$

Propriété 4 : Soit $a > 0$ et n un entier positif. Le nombre $x = a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre **positif** tel que $x^n = a$.

Remarques :

- Le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine n-ième** de a et il est notée $\sqrt[n]{a}$.
- On a : $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{n \times \frac{1}{n}} = a^1 = a$.
- La racine 2-ième correspond à « racine carrée » : $a^{\frac{1}{2}} = a^{0.5} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Exemple 6 : Calculer les nombres suivants :

- $100^{\frac{1}{2}} =$
- $64^{\frac{1}{3}} =$
- $81^{\frac{1}{4}} =$

