

## Fiche F2.1 : Fonctions exponentielles

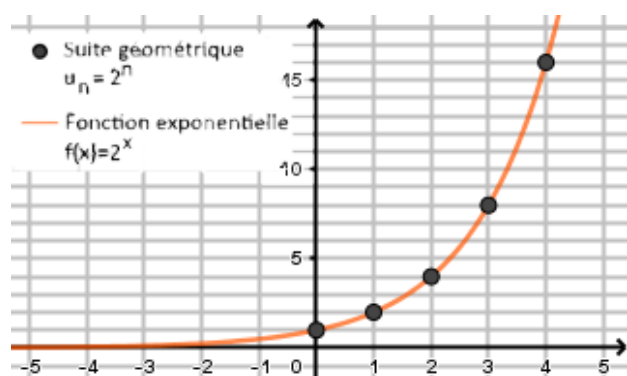
### 1 – Définition

**Définition 1** : Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. On appelle fonction **exponentielle de base  $a$**  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = a^x$  (la variable est en exposant)

Remarques :

- La fonction exponentielle de base  $a$  prolonge la suite géométrique  $u_n = a^n$  en étendant son ensemble de définition à l'ensemble des nombres réels.
- L'image d'un nombre se calcule avec la calculatrice en utilisant la touche  $\boxed{\wedge}$ .
- Quelque soit la base  $a$ , on a toujours  $f(0) = a^0 = 1$  et  $f(1) = a^1 = a$

**Exemple 1** : On a tracé ci-dessous la fonction  $f(x) = 2^x$ .



- $f(4) = 2^4 \approx 16$
- $f(3,5) = 2^{3,5} \approx 11.313$
- $f(-1,5) = 2^{-1,5} = \frac{1}{2^{1,5}} \approx 0.354$
- $f(0) = 2^0 = 1$
- $f(1) = 2^1 = 2$

**Propriété 1** : La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = k \times a^x$  prolonge la suite géométrique  $(u_n)$  de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = k$  et de raison  $q = a$ .

**Exemple 2** : Sabrina place 500 € au taux annuel de 4,5%

1) On note  $u_n$  le capital au bout de  $n$  années de placement.

a. Quelle est la nature de la suite ?

La suite  $(u_n)$  est géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = 500$  et de raison  $q = 1.045$ .

b. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  ?

Pour tout rang  $n$ , on a  $u_n = u_0 \times q^n$  d'où  $u_n = 500 \times 1.045^n$ .

c. Quel est le capital : Au bout de 3 ans ? Au bout de 17 ans ?

On calcule  $u_3 = 500 \times 1.045^3 \approx 570.58$  € et  $u_{17} = 500 \times 1.045^{17} \approx 1056.68$  €

2) On considère la fonction  $f(x) = 500 \times 1.045^x$ . Cette fonction prolonge la suite  $(u_n)$  précédente.

On peut l'utiliser pour calculer le capital au bout d'un temps précis entre deux années entières.

a. Quel est le capital au bout de 1 année et demi ?  $f(1.5) = 500 \times 1.045^{1.5} \approx 534.12$  €

b. Quel est le capital au bout de 7 trimestres ?  $f\left(\frac{7}{3}\right) = 500 \times 1.045^{7/3} \approx 554.08$  €

c. Quel est le capital au bout de 1000 jours ?  $f\left(\frac{1000}{365}\right) = 500 \times 1.045^{1000/365} \approx 506.07$  €



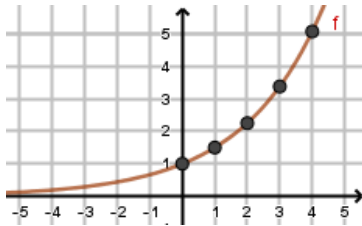
## 2 – Sens de variation et représentation graphique

Propriété 2 : Soit  $a > 0$ . La fonction exponentielle de base  $f(x) = a^x$  est :

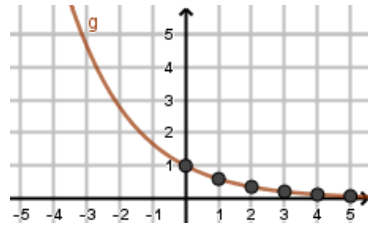
- Strictement **croissante** si  $a > 1$
- Strictement **décroissante** si  $0 < a < 1$

Exemple 3 :

- La fonction  $f(x) = 1.5^x$  est **croissante**.



- La fonction  $g(x) = 0.8^x$  est **décroissante**.



Remarques :

- La fonction  $f(x) = a^x$  a le même sens de variation que la suite géométrique qu'elle prolonge.
- Si  $k > 0$ , la fonction  $f(x) = k \times a^x$  a le même sens de variation que la fonction exponentielle  $f(x) = a^x$ .

Exemple 4 : La fonction  $f(x) = 500 \times 1.045^x$  de l'exemple 2 est croissante.

## 3 – Règles de calcul

Les règles de calculs avec les puissances entières s'étendent au cas où l'exposant est un nombre réel.

Propriété 3 : Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs,  $x, y$  deux nombres réels et  $n$  un entier. On a :

- $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^n = a^{nx}$
- $(a \times b)^x = a^x \times b^x$

Remarque : Pour tout réel  $a > 0$ ,  $a^{-1}$  est l'**inverse** de  $a$  :  $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$

Exemple 5 : Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{8,75^7 \times 8,75^{-1,5}}{8,75^{0,5}} = \frac{8,75^{7+(-1,5)}}{8,75^{0,5}} = \frac{8,75^{5,5}}{8,75^{0,5}} = 8,75^{5,5-0,5} = 8,75^5$
- $\frac{(1,8^{-1,1})^4}{1,8^{-4,2}} = \frac{1,8^{4 \times (-1,1)}}{1,8^{-4,2}} = \frac{1,8^{-4,4}}{1,8^{-4,2}} = 1,8^{-4,4-(-4,2)} = 1,8^{-4,4+4,2} = 1,8^{-0,2} = \frac{1}{1,8^{0,2}}$
- $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$

Propriété 4 : Soit  $a > 0$  et  $n$  un entier positif. Le nombre  $x = a^{\frac{1}{n}}$  est l'unique nombre **positif** tel que  $x^n = a$ .

Remarques :

- Le nombre  $a^{\frac{1}{n}}$  est appelé la **racine n-ième** de  $a$  et il est notée  $\sqrt[n]{a}$ .
- On a :  $(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \times \frac{1}{n}} = a^1 = a$ .
- La racine 2-ième correspond à « racine carrée » :  $a^{\frac{1}{2}} = a^{0,5} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Exemple 6 : Calculer les nombres suivants :

- $100^{\frac{1}{2}} = 10^{0,5} = \sqrt{100} = 10$
- $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$  (car  $4^3 = 64$ )
- $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$  (car  $3^4 = 81$ )

