Fiche ___ : Variation instantanée

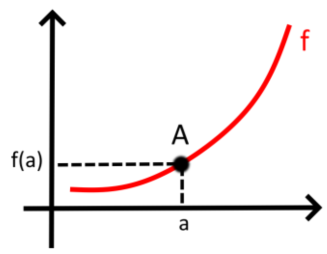
Introduction :

● On considère une fonction f définie sur un intervalle I et on note C_f sa courbe.

Cette fonction peut modéliser l'évolution d'un phénomène.

● Soit a un nombre de I. on note $A(a; f(a))$ le point de la courbe correspondant.

On s'intéresse ici à mesurer la variation instantanée du phénomène en $x = a$.



1 – Tangente à une courbe

Définition 1 :

● On appelle **sécante** à une courbe toute droite passant par deux points distincts A et M de la courbe.

● On appelle **tangente** à C_f en A et on note T_A la droite qui passe par A et qui est la position limite des sécantes (AM) lorsque le point M devient aussi proche que l'on veut du point A.

Fig 1 : Une sécante (AM)

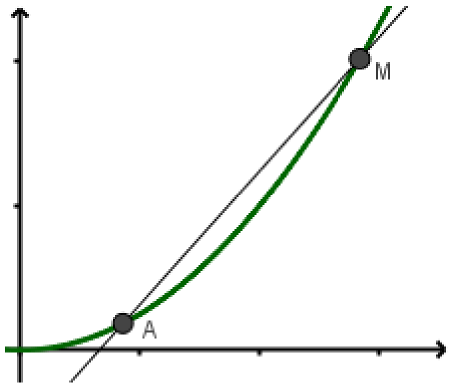


Fig 2 : M se rapproche de A

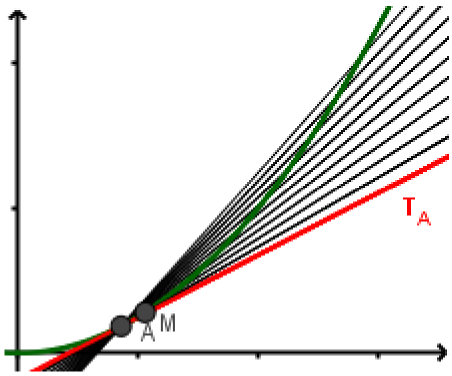
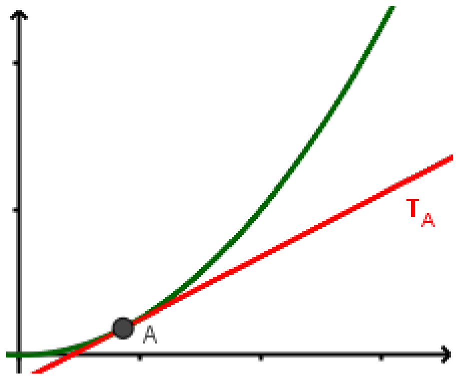


Fig 3 : La tangente T_a

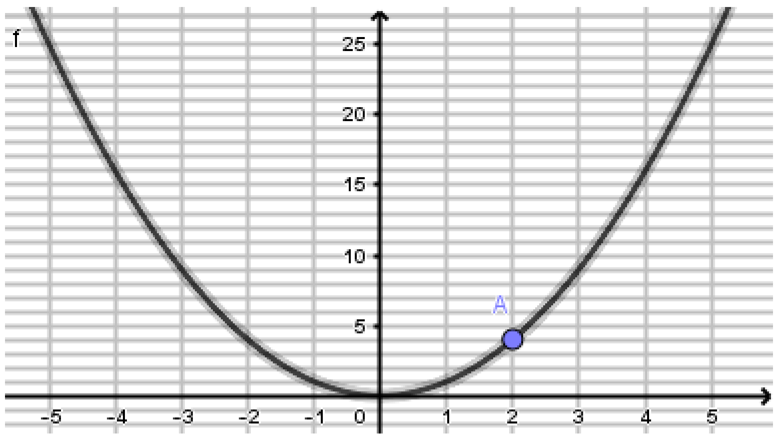


Remarque : Le mot tangente provient du grec et signifie « toucher ». La tangente T_A est la droite qui « frole » la courbe au niveau du point A et la touche en ce point.

Exemple 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe tracée ci-dessous.

1) Tracer en bleu une sécante à la courbe de f.

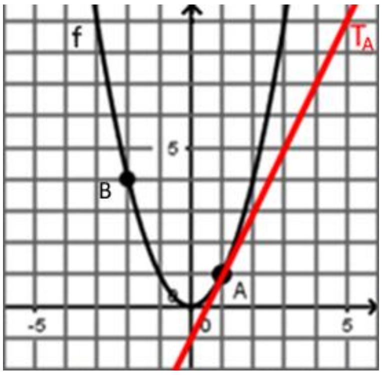
2) Tracer en rouge « au jugé » la tangente T_A à la courbe de f au niveau du point A.



2 – Nombre dérivée

Définition 2 : On appelle nombre dérivé de la fonction f en a, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe de f au point A.

Exemple 2 : Soit $f(x) = x^2$ dont on tracé ci-contre sa courbe et soit A le point de sa courbe d'abscisse $a = 1$.



1) On a tracé la tangente T_A à la courbe de f au niveau du point A.

   Déterminer $f'(1)$.

   ____

2) On sait que $f'(-2) = -4$. Tracer la tangente T_B au niveau du point B.

   ____

Remarques :

● Le nombre $f'(a)$ correspond en quelque sorte à la « pente » de la courbe de f au niveau du point A.

● Si f modélise une évolution alors $f'(a)$ représente la **vitesse instantanée** de cette évolution en $x = a$.

● Pour de « grandes valeurs » de a, la variation absolue avec incrémentation d'une unité $f(a+1) - f(a)$ peut être approximée par nombre dérivé $f'(a)$.

Exemples d'application :

● Physique : On note $f(t)$ la distance en mètres parcouru par un mobile en t secondes. Le nombre dérivé $f'(t)$ correspond à la **vitesse instantanée** du mobile (en m/s) à l'instant t.

● Biologie : Lors d'une épidémie, on note $f(x)$ le nombre de cas positifs au bout de x jours. La **vitesse de propagation** de l'épidémie (en nombre de cas par jour) est donnée par la variation absolue du nombre de cas entre deux jours consécutifs $f(x+1) - f(x)$. Celle-ci peut être assimilé au nombre dérivée $f'(x)$.

● Economie : Dans une production, on note $C(x)$ le coût de production de x unités. Le **coût marginal** est le coût induit par la production d'une unité supplémentaire : Il est donné par la formule $C(x+1) - C(x)$. En pratique, on utilise le nombre dérivé $C'(x)$ pour approximer ce coût marginal.

3 – Equation de la tangente

Propriété 1 : L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f en A est de la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple 3 : Déterminer l'équation de la tangente T_A de l'exemple précédent.

● ____

● ____

● ____

● ____