# Fiche F3.2 : Variation globale

## 1 – Fonction dérivée

Définition 1 : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. La **fonction dérivée** de $f$ est la fonction $f'$, qui à chaque nombre $x$ de $I$, associe le nombre dérivée $f'(x)$.

Remarque : La fonction dérivée $f'$ permet de calculer la variation instantanée de la fonction $f$ en n'importe quel point de la courbe de $f$.

## 2 – Dérivées des fonctions usuelles

Voici les fonctions dérivées des fonctions usuelles ($c$ désigne une constante réelle et $n$ un entier positif) :

| **Fonction $f$** | **Fonction dérivée $f'$** | **Intervalle de dérivabilité** |
|---|---|---|
| $f(x) = c$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ | $f'(x) = 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^3$ | $f'(x) = 3x^2$ | $\mathbb{R}$ |

Exemple 1 : Calculer la variation instantanée de la fonction carré en $x = 1$.

On utilise sa fonction dérivée $f'(x) = 2x$. On a donc $f'(1) = 2 \times 1 = 2$

## 3 – Opérations sur les dérivées

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ et $k$ un nombre réel.

| **Opération** | **Fonction $f$** | **Fonction $f'$** |
|---|---|---|
| Somme | $f = u + v$ | $f' = u' + v'$ |
| Produit par un réel | $f = k \times u$ | $f = k \times u'$ |

Remarques : Si $f = u - v$ alors on a $f' = u' - v'$ car $f$ peut alors s'écrire $f = u + (-1) \times v$

Exemple 2 : Dériver les fonctions suivantes :

- Fonction : $f(x) = 2x + 3$ Dérivée : $f'(x) = 2$
- Fonction : $f(x) = 5x^2$ Dérivée : $f'(x) = 5 \times 2x = 10x$
- Fonction : $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ Dérivée : $f'(x) = 2 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 4x - 3$
- Fonction : $f(x) = -3x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 10$ Dérivée : $f'(x) = -3 \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x + 0 = -9x^2 + x$

Remarque : Avec les formules précédentes on peut calculer la fonction dérivée de n'importe quel **polynôme** : Sa dérivée est un polynôme de degré inférieur.

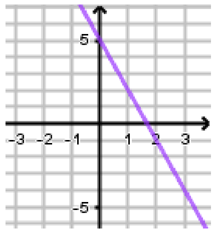
## 4 – Dérivée et Sens de variation

Propriété 1 : Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

- La fonction $f$ est **croissante** sur $I$ si et seulement si la dérivée $f'$ est **positive** sur $I$.
- La fonction $f$ est **décroissante** sur $I$ si et seulement si la dérivée $f'$ est **négative** sur $I$.

Remarque : Pour étudier les **variations** d'une fonction $f$, on peut donc étudier le **signe** de sa dérivée $f'$ :

Exemple 3 : Déterminer le sens de variation de la fonction $f(x) = -3x + 5$.




On commence par dériver la fonction $f$ : $f'(x) = -3$

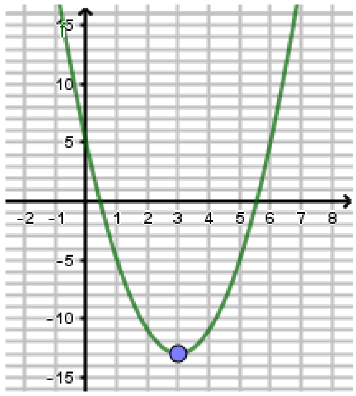
$f'$ est une fonction constante, négative sur $\mathbb{R}$

La fonction $f$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4 : Réaliser le tableau de variation de la fonction $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

1) Dériver la fonction $f$. Quelle est la forme de la fonction $f'$ ?

$f'(x) = 2 \times 2x - 12 \times 1 + 0 = 4x - 12$. $f'$ est une fonction affine (droite)




2) Déterminer le tableau de signe de $f'$ puis en déduire les variations de $f$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} = 3$

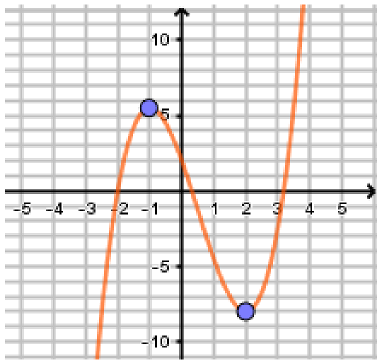
| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variation de $f(x)$ | | $\searrow$ | $-13$ | $\nearrow$ | |

$f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 5 = -13$.

Exemple 5 : Réaliser le tableau de variation de la fonction $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2$.

1) Dériver la fonction $f$.

$f'(x) = 3x^2 - 1.5 \times 2x - 6 \times 1 + 0 = 3x^2 - 3x - 6$




2) Montrer que $f'$ peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$

$3(x+1)(x-2) = 3(x^2 - 2x + x - 2) = 3(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 3x - 6$

3) Déterminer le tableau de signe de $f'$ puis en déduire les variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variation de $f(x)$ | | $\nearrow$ | $5.5$ | $\searrow$ | $-8$ | $\nearrow$ | |

$f(-1) = (-1)^3 - 1.5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2 = 5.5$

$f(2) = (2)^3 - 1.5 \times (2)^2 - 6 \times 2 + 2 = -8$