Fiche P2.1 : Probabilités conditionnelles

1 – Rappels sur les probabilités

Propriété 1 : On considère une expérience aléatoire d'univers Ω ainsi que deux évènements A et B.

- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des issues qui le compose.
- Si on est dans une situation **d'équiprobabilité**, alors $P(A) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ total}$.
- On a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemple 1 : Les salariés d'une agence d'interim ont été classé selon leurs atouts sur le marché de l'emploi. Le tableau ci-dessous donne la répartition des salariés selon les deux critères suivants : La maîtrise de l'anglais et la possession du permis B.

	Permis B	Non Permis B	Total
Anglais	27	9	36
Non Anglais	18	6	24
Total	45	15	60

On choisit un salarié au hasard dans l'entreprise et on considère les deux évènements suivants :

A : « Le salarié maîtrise l'Anglais » B: « Le salarié possède le permis B »

1) a. Quelle est la probabilité que le salarié maîtrise l'anglais ? $P(A) = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = 0.6$ soit 60%

   b. Quelle est la probabilité que le salarié possède le permis B ? $P(B) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 0.75$ soit 75%

2) a. Quelle est la probabilité que le salarié ne maîtrise pas l'anglais ?

   $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$ soit 40%

   b. Quelle est la probabilité que le salarié maîtrise l'anglais et possède le permis B ?

   $P(A \cap B) = \frac{27}{60} = \frac{9}{20} = 0.45$ soit 45%

   c. Quelle est la probabilité que le salarié maîtrise l'anglais ou possède le permis B ?

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.75 - 0.45 = 0.90$ soit 90%

2 – Probabilité conditionnelle

Définition 1 : On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A, et on note $P_A(B)$, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

Exemple 1 (Suite) : Calculer et interpréter les probabilités conditionnelles suivantes :

- $P_A(B)$ désigne la probabilité de choisir un salarié qui a le permis B parmi ceux qui maîtrise l'anglais.

  $P_A(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} = 0.75$ soit 75%

- $P_B(A)$ désigne la probabilité de choisir un salarié qui maîtrise l'anglais parmi ceux qui ont le permis B.

  $P_B(A) = \frac{27}{45} = \frac{3}{5} = 0.6$ soit 60%

Remarque : Attention, en règle général, $P_A(B) \neq P_B(A)$.

3 – Formule pour calculer $P_A(B)$

Propriété 2 : Soient A et B deux événements tel que $P(A) \neq 0$. La probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$ est donné par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(Intersection)}{P(Condition)}$

Exemple 2 : La répartition des groupes sanguins dans la population française est donnée dans le tableau ci-dessous. On choisit une personne au hasard dans la population française.

On considère les deux évènements suivants :

A : « La personne est du groupe A »

B : « La personne est de rhésus positif »

		Groupe sanguin			
		O	A	B	AB
Rhésus	+	37%	39%	7%	2%
	−	6%	6%	2%	1%

● $P(A) = 0.45$

● $P(B) = 0.37 + 0.39 + 0.07 + 0.02 = 0.85$

● $P(A \cap B) = 0.39$: C'est la probabilité de choisir un individu du groupe $A+$

● $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.39}{0.45} = \frac{39}{45} \approx 0.87$

Il y a 89% de chance de choisir une personne de rhésus positif sachant qu'elle est du groupe A :

● $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.39}{0.85} = \frac{39}{85} \approx 0.46$

Il y a 46% de choisir une personne du groupe A sachant qu'elle est de rhésus positif.

3 – Indépendance de deux évènements

Définition 2 : On dit que deux évènements sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la probabilité que l'autre se réalise

Exemple 3 : Les évènements « Il pleut » et « La machine à café tombe en panne » sont (à priori) indépendants.

Propriété 1 : Deux évènements A et B sont indépendants si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) $P_A(B) = P(B)$

(2) $P_B(A) = P(A)$

(3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple 4 : Reprendre les exemples 1 et 2 et déterminer si les évènements A et B sont indépendants

● Ex 1 : Oui, les conditions (1) et (2) sont satisfaites. On a $P_A(B) = P(B) = 0.75$ et $P_B(A) = P(A) = 0.6$. Pour un salarié, la maîtrise de l'Anglais n'a donc pas d'incidence sur la possession du permis et vice-versa.

● Ex 2 : Non, la condition (3) n'est pas vérifiée. $P(A) \times P(B) = 0.45 \times 0.85 \approx 0.38$ et $P(A \cap B) = 0.39$. Etre du groupe A a une (légère) incidence sur le fait d'être de Rhésus positif.