Fiche P2.2 : Arbres pondérés

1 – Règles de calculs dans un arbre pondéré

On peut représenter une situation aléatoire avec des probabilités conditionnelles avec un arbre pondéré.

Propriété 1 : Dans un arbre pondéré, on peut utiliser les 3 règles suivantes :

- **Règle 1** : À partir d'un même nœud, la somme des probabilités sur les branches doit être égale à 1 : $P_A(B) + P_{\bar{A}}(B) = 1$.
- **Règle 2** : Pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin : $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
- **Règle 3** : La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

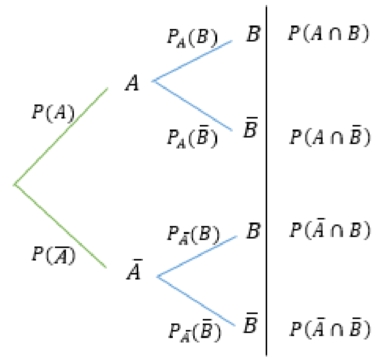


Figure 1 : Un arbre pondéré

Exemple 1 : L'Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies (OFDT) a réalisé une enquête auprès des jeunes de 18 à 25 ans sur leur consommation de tabac et d'alcool. Parmi les personnes interrogés :

- 78 % d'entre eux déclarent consommer de l'Alcool (au moins une fois lors du dernier mois)
- Parmi ceux qui consomment de l'alcool, 43 % d'entre eux déclarent consommer également du tabac.
- Parmi ceux qui ne consomment pas d'alcool, 15 % d'entre eux déclarent consommer du tabac.

On interroge un jeune au hasard.

On considère les évènements suivants :

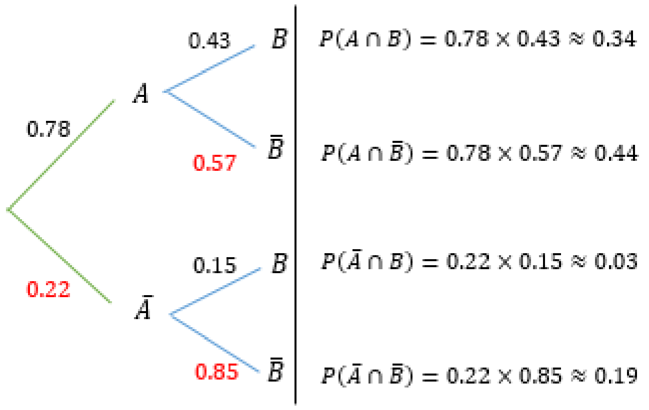
A : « La personne interrogée consomme de l'alcool »

B : « La personne interrogée consomme du tabac »

1) Traduire les informations de l'énoncé à l'aide des probabilités conditionnelles

   $P(A) = 0.78$; $P_A(B) = 0.43$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0.15$

2) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.



3) a. Quelle est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac et de l'alcool.

   D'après l'arbre on a $P(A \cap B) \approx 0.34$, donc la probabilité est d'environ 34 %.

   b. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne consomme ni tabac ni alcool.

   D'après l'arbre on a $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \approx 0.19$, donc la probabilité est d'environ 19 %.

4) Quelle est la probabilité que la personne interrogée consomme du tabac.

   $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \approx 0.34 + 0.03 \approx 0.37$, donc la probabilité est d'environ 37 %.

5) On interroge un fumeur, quelle est la probabilité qu'il boive de l'alcool ?

   On cherche la probabilité d'interroger une personne qui consomme de l'alcool sachant qu'elle consomme du tabac c'est à dire $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.34}{0.37} \approx 0.92$. Donc la probabilité est d'environ 92%.

2 – Succession d'épreuves indépendantes

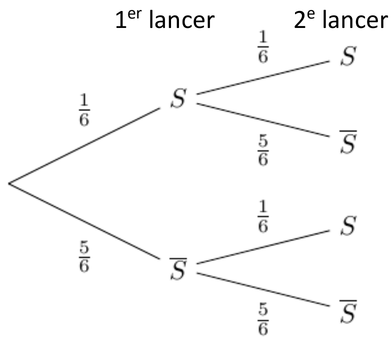
• On peut utiliser également un arbre pondéré pour représenter une expérience aléatoire composée d'une succession d'épreuves indépendantes (dont les résultats de l'une n'a pas d'influence sur ceux des autres)

• Chaque « niveau » de l'arbre correspond alors à l'une des épreuves.

• Les règles de calculs énoncés précedemment s'appliquent également dans ce contexte.

Exemple 2 : On lance 2 fois de suite un dé bien équilibré. Soit S : « Obtenir 6 ».

Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré puis calculer :



● $P(Obtenir\ un\ double\ six) = P(SS) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

● $P(Obtenir\ aucun\ six) = P(\bar{S}\bar{S}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

● $P(Obtenir\ un\ seul\ six) = P(S\bar{S}) + P(\bar{S}S) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = 2 \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$